

# LA MÉCANIQUE À PARTIR DE ZÉRO

Pierre ALBARÈDE <sup>1</sup>

avril 2003

<sup>1</sup><http://pierre.albarede.free.fr>



# Table des matières

<b>I</b>	<b>De zéro à un espace matériel</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Espace</b>	<b>11</b>
1.1	Symboles, règles . . . . .	11
1.2	Ensemble . . . . .	14
1.3	Fonction, famille . . . . .	14
1.3.1	Variable double . . . . .	17
1.3.2	Application, suite, variable multiple . . . . .	19
1.3.3	Groupe, transformée, variance, morphisme . . . . .	22
1.4	Espace vectoriel, espace affine . . . . .	27
1.4.1	Espace vectoriel ordonné . . . . .	28
1.4.2	Dimension finie, rang . . . . .	30
1.4.3	Champ . . . . .	31
1.4.4	Application linéaire, application affine . . . . .	33
1.4.5	Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . . .	36
1.4.6	Application multilinéaire . . . . .	37
1.5	Matrice . . . . .	38
1.5.1	Déterminant . . . . .	41
1.5.2	Matrice et famille de vecteur . . . . .	42
1.5.3	Matrice et application linéaire . . . . .	44
1.5.4	Déterminant d'opérateur linéaire . . . . .	46
1.5.5	Matrice et forme bilinéaire . . . . .	48
1.6	Espace euclidien . . . . .	49
1.6.1	Produit scalaire, orthogonalité . . . . .	49
1.6.2	Opérateur linéaire symétrique, tenseur . . . . .	52
1.6.3	Adjoint . . . . .	54
1.6.4	Application orthogonale, isométrie . . . . .	55
1.6.5	Mesure de parallélépipède . . . . .	57
1.6.6	Produit vectoriel, base duale . . . . .	58
1.6.7	Espace newtonien . . . . .	61
1.7	Diagonalisation . . . . .	63

1.7.1	Matrice carrée . . . . .	63
1.7.2	Matrices réelles symétriques . . . . .	65
1.8	Tenseur . . . . .	66
1.8.1	Produit tensoriel . . . . .	66
1.8.2	Tenseur . . . . .	70
1.8.3	Changement de base tensoriel . . . . .	72
<b>2</b>	<b>Masse</b>	<b>75</b>
2.1	Analyse . . . . .	75
2.1.1	Topologie . . . . .	75
2.1.2	Distance . . . . .	78
2.1.3	Norme . . . . .	80
2.1.4	Espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .	80
2.1.5	Différentielle . . . . .	81
2.1.6	Prolongement continu ou croissant . . . . .	89
2.2	Analyse fonctionnelle . . . . .	94
2.2.1	Espaces fonctionnels . . . . .	94
2.2.2	Mesure . . . . .	97
2.3	Intégrale . . . . .	101
2.3.1	Méthode axiomatique . . . . .	101
2.3.2	Intégrale de Riemann . . . . .	101
2.3.3	Primitive . . . . .	104
2.3.4	Intégrale de Lebesgue . . . . .	107
<b>II</b>	<b>Mécanique classique</b>	<b>109</b>
<b>3</b>	<b>Mécanique newtonienne</b>	<b>111</b>
3.1	Géométrie . . . . .	111
3.1.1	Corps . . . . .	111
3.1.2	Corps et système de coordonnées . . . . .	113
3.1.3	Coordonnées curvilignes . . . . .	115
3.1.4	Bord, contact . . . . .	116
3.2	Cinématique . . . . .	118
3.2.1	Mouvement . . . . .	118
3.2.2	Constante du mouvement, dérivée lagrangienne . . . . .	121
3.2.3	Solide . . . . .	122
3.2.4	Référentiel-espace, invariance cinématique . . . . .	123
3.2.5	Solide non-dégénéré . . . . .	125
3.2.6	Composition des vitesses et des accélérations . . . . .	126
3.2.7	Contact en mouvement . . . . .	129

3.3	Cinétique . . . . .	131
3.3.1	Corps massif . . . . .	131
3.3.2	Conservation de la masse . . . . .	133
3.3.3	Torseur cinétique . . . . .	135
3.4	Dynamique . . . . .	135
3.4.1	Principes . . . . .	135
3.4.2	Invariance . . . . .	136
3.4.3	Théorème des torseurs cinétique et dynamique . . . . .	137
<b>4</b>	<b>Mécanique vectorielle du solide</b>	<b>141</b>
4.1	Géométrie . . . . .	141
4.2	Cinématique . . . . .	144
4.3	Cinétique . . . . .	145
4.3.1	Opérateur d'inertie . . . . .	145
4.3.2	Matrice d'inertie . . . . .	147
4.3.3	Base propre d'inertie . . . . .	148
4.4	Dynamique . . . . .	149
4.4.1	Théorème du moment cinétique . . . . .	149
4.4.2	Equations d'Euler et effets gyroscopiques . . . . .	150
<b>5</b>	<b>Mécanique fonctionnelle</b>	<b>153</b>
5.1	Des contraintes cinématiques aux coordonnées adaptées . . . . .	153
5.2	De l'accélération à l'énergie cinétique . . . . .	156
5.3	De la force à l'énergie potentielle . . . . .	158
5.4	Équations sur la fonction de Lagrange . . . . .	160
5.5	Equations sur la fonction de Hamilton . . . . .	162
5.6	Constantes du mouvement . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Mécanique fonctionnelle des solides</b>	<b>165</b>
6.1	Mouvement d'un corps massif . . . . .	165
6.2	Mouvement d'un solide massif . . . . .	166
6.3	Gyroscope . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Équilibre, stabilité, petites oscillations</b>	<b>175</b>
7.1	Définition et caractérisation de l'équilibre . . . . .	175
7.2	Stabilité en équilibre . . . . .	176
7.2.1	Stabilité de l'équilibre harmonique . . . . .	177
7.3	Equations de Lagrange linéarisées . . . . .	178
7.4	Oscillation libre et forme normale . . . . .	179
7.5	Oscillations forcées . . . . .	181
7.6	Oscillation avec frottement . . . . .	183

<b>8</b>	<b>Mécanique variationnelle</b>	<b>187</b>
8.1	La fonctionnelle action et sa différentielle . . . . .	187
8.2	Théorème et principe variationnels . . . . .	189
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>193</b>
9.1	La méthode lagrangienne . . . . .	193
9.2	Quelles forces fondamentales? . . . . .	194
9.3	Quelles forces effectives? . . . . .	194
9.4	Le sens du progrès en mécanique . . . . .	196
<b>III</b>	<b>Notice historique</b>	<b>199</b>

# Introduction

Il y a trois siècles, la science fut transformée par l'idée dramatiquement nouvelle que des règles basées sur des équations mathématiques pourraient servir à décrire le monde naturel [28].

Une bonne notation a une subtilité et un pouvoir de suggestion qui la font par moments ressembler presque à un vivant professeur (B. Russel dans [27]).

Il est légitime et nécessaire de fonder maintenant la mécanique sur des axiomes clairement explicités, et de mettre en évidence les structures utilisées [18, t. 3, p. V].

En mécanique, on traduit des perceptions en un langage mathématique, et on élabore des modèles prédictifs, dont le succès atteste une certaine compréhension du monde.

Au départ, il y a abondance de perceptions, par rapport à la pauvreté et à l'abstraction du langage. Il faut donc se contenter de succès modestes : comprendre des choses simples, puis perfectionner le langage, pour comprendre des choses plus complexes, et ainsi de suite. Le langage est la structure du monde.

Faut-il comprendre, quand on doit seulement produire ? Comprendre permet notamment de réagir à ce qui n'a pas été prévu. En effet, la nature ne se plie pas toujours aux figures imposées ; les plans rigides conduisent tôt ou tard à des échecs, allant du ridicule au catastrophique. Ainsi, par exemple, un échec commercial est une mauvaise compréhension, sinon d'un produit, d'un marché.

Cherchons à comprendre la mécanique, à l'aide du *Petit Larousse illustré* (1976) :

- *mécanique* : relatif aux lois du mouvement et de l'équilibre ;
- *mouvement* : état d'un corps, dont la position par rapport à un point fixe, change continuellement ;
- *fixe* : qui ne se meut pas ;
- *meut* (de mouvoir) → mouvement.

Exercice : continuer avec *équilibre*.

Un dictionnaire propose des définitions circulaires à l'intérieur d'un vocabulaire achevé, alors que pour comprendre il faut construire à partir de concepts élémentaires, atomes ou monades.

En mécanique, au contraire des mathématiques, certains mots veulent dire quelque chose : la mécanique est une science, les mathématiques sont un jeu. La mécanique, comme la physique, peut être confrontée à l'expérience, mais, au contraire de la physique, elle accorde moins d'importance à l'expérience qu'à la critique logique : la mécanique est exacte, la physique est empirique.

	exact	empirique
science	mécanique	physique
jeu	mathématiques	

Exercice : remplir la case vide dans le tableau précédent.

D'autres sciences exactes, d'ailleurs liées en pratique à la mécanique, sont l'économie et l'automatique. La mécanique est spécifiquement la science exacte qui ne s'occupe pas de l'homme (opposé à l'animal). On pourra avoir intérêt à dire, plutôt que « science exacte inhumaine », « science exacte de la matière ».

En mécanique classique, on regarde seulement ce qui est ni très rapide, ni très lent, ni très léger, ni très lourd. Le domaine du rapide est celui de la mécanique relativiste ; le domaine du lent est celui de la mécanique statistique ; le domaine du léger est celui de la mécanique quantique ; le domaine du lourd est celui de la théorie de la relativité générale. Mais « rapide, lent, léger, lourd », pour évidents qu'ils soient, ne font pas de bons atomes.

# Première partie

## De zéro à un espace matériel



# Chapitre 1

## Espace

### 1.1 Symboles, règles

Principes de lecture des expressions mathématiques :

- lire de haut en bas puis de gauche à droite jusqu'à obtenir une expression bien formée,
- associer le prochain symbole aux précédents plutôt qu'aux suivants, sauf priorité contraire.

Les tables numériques sont abrégées en base deux.

Plus + :

$$x + y = y + x, \quad x + (y + z) = x + y + z, \\ 0 + x = x, \quad 1 + (-1) = 0, \quad 1 + 1 = 10, \quad 1 + 10 = 11 \dots$$

Fois (sans symbole) :

$$xy = yx, \quad x(yz) = xyz, \quad (x + y)z = xy + yz, \\ 0x = 0, \quad 1x = x, \quad 10\ 10 = 100 \dots$$

L'absence de symbole oblige à n'utiliser fois qu'entre des symboles à un caractère (si on veut dans plusieurs alphabets), ou à déclarer les symboles à plusieurs caractères.

Moins - :

$$x - y = x + (-y), \quad -x = (-1)x, \quad -(-x) = x, \quad x - x = 0, \\ -0 = 0, \quad (-x)y = -xy, \quad (-x)(-y) = xy, \quad x - y + (y - z) = x - z.$$

Fois est prioritaire sur plus et moins,  $-xy = -(xy)$ .

Divise / :

$$x/y = \frac{x}{y}, \frac{xy}{yz} = \frac{x}{z}, \frac{x}{x} = 1, \frac{x}{1} = x, \frac{0}{x} = 0, \frac{100}{10} = 10 \dots$$

Attention :  $x/0$  est interdit.

Puissance (sans symbole) :

$$x^{y+z} = x^y x^z, (x^y)^z = x^{yz}, x^{-1} = \frac{1}{x}, x^0 = 1, x^1 = x.$$

Puissance est prioritaire sur fois. Attention :  $0^0$  est interdit.

Plus en rond  $\oplus$  :

$$x \oplus y = y \oplus x, x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z.$$

Moins en rond  $\ominus$  :

$$x \ominus x = 0, x \ominus y + (y \ominus z) = x \ominus z.$$

La dernière règle, dite de Chasles, est également suivie par  $-$  et  $/$ .

Rond  $\circ$  :

$$x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z, (x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z.$$

Point . :

$$x.y.z = x.(y.z), (x + y).z = x.z + y.z, x.(y + z) = x.y + x.z, \\ 0.x = x.0 = 0.$$

Croix  $\times$  :

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z, x \times (y + z) = x \times y + x \times z, \\ x \times y + y \times x = 0, 0 \times x = x \times 0 = 0.$$

Croix en rond  $\otimes$  :

$$(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z, x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z, \\ x \otimes y \otimes z = x \otimes (y \otimes z), 0 \otimes x = x \otimes 0 = 0.$$

Symboles logiques et ensemblistes  $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \in, \subset, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, *$  :

$$x^* = x \setminus 0.$$

Symboles ordinaux  $\leq, \geq, <, >, \vee, \wedge, \inf, \sup$  :

$$\begin{aligned} x \leq x, \quad x \leq y \leq z &\Rightarrow x \leq z, \quad (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y, \\ x \vee y \vee z &= x \vee (y \vee z) = \sup[\{x, y, z\}], \\ x \vee x &= x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z), \\ x \wedge y \wedge z &= x \wedge (y \wedge z) = \inf[\{x, y, z\}], \\ x \wedge x &= x, \quad x \wedge y = y \wedge x, \quad x \wedge y + z = (x + z) \wedge (y + z), \\ -(x \wedge y) &= -x \vee -y, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 0 \wedge 1 = 0. \end{aligned}$$

Flemme ... :

$$(x = y \dots z) = (y \leq x \leq z).$$

Symboles fonctionnels  $\mapsto, \delta, \chi, \sqrt{\quad}, \text{ten}, \text{Li}, \sum, \int, d, \Pi \dots$

Symboles numériques  $e, \pi, i$  :

$$1 = \ln[e] = \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] = -i^2.$$

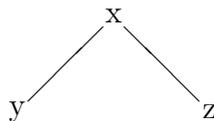
Symboles des ensembles de nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Symbole d'ensemble des parties **P**.

Symboles d'ensembles de fonctions **F, A, Li, Li2, C, LiC, AC, ACK**.

Les opérations sont  $+, -, /, \oplus, \ominus, \circ, \cdot, \times, \otimes, \vee, \wedge$  ainsi que fois et puissance.

Pour nommer les parties d'une expression, on procède, poétiquement, par analogie avec le corps humain ou un arbre. Ainsi, dans  $x[y, z]$ , la tête est  $x$  (préfixe), le corps est la séquence  $y, z$ , et les membres sont  $y$  et  $z$ .



Attention, dans  $x = y$ , la tête n'est pas  $x$  mais  $=$  (infixe).

Une somme est une expression de tête  $+, \oplus, \sum$ ; les membres d'une somme sont appelés termes. Un produit est une expression de tête fois (sans symbole) ou  $\cdot, \circ, \times, \otimes, \Pi$ ; les membres d'un produit sont appelés facteurs. Une différence :  $-, \ominus$ , un quotient :  $/ \dots$

$+$  est symétrique dans  $x + y = y + x$ , plat dans  $x + y + z = x + (y + z)$ , sans ordre dans  $x + y + z = x + z + y = y + x + z = y + z + x = z + x + y = z + y + x$ .  $\times$  est antisymétrique dans  $x \times y = -y \times x$ .  $\Rightarrow$  et  $\Leftarrow$  sont mutuellement symétriques dans  $x \Rightarrow y$  et  $y \Leftarrow x$ .  $\times$  est distributive sur  $+$  dans  $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ .

Comme il y a beaucoup de choses à dire, les symboles et les nombres sont réutilisés, par économie. Par exemple,  $0 \vee 1$  exprime non seulement une borne supérieure, mais aussi une disjonction logique « ou », 0, 1 signifiant faux, vrai.

Les symboles et les nombres, étrangers au monde (ou au moins à une partie du monde), sont des atomes, qu'on n'explique pas, mais qu'on utilise pour exprimer les propriétés des choses, à partir de règles, par référence quantifiée, comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi, à partir de la règle de Chasles, on exprimera divers théorèmes de Chasles.

## 1.2 Ensemble

## 1.3 Fonction, famille

**Définition 1.1** (fonction, famille). *Soit  $E, F$  deux ensembles. Une fonction de  $E$  vers  $F$ , ou encore, une famille de  $E$  paramétrée par  $F$ , est une relation, qui, à tout  $x \in E$ , associe au plus un  $y \in F$ ,*

$$(x \in E \mapsto y \in F) = (y \in F, x \in E). \quad (1.1)$$

Soit  $\mathbf{F}[E, F]$  l'ensemble des fonctions de  $E$  vers  $F$ .

Formellement, pour une fonction ( $y \in F, x \in E$ ),  $E, F, x, y$  sont, respectivement, l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée, la variable et la valeur, ou encore, pour une famille ( $y \in F, x \in E$ ),  $x, E$  sont, respectivement, le paramètre et l'ensemble de paramètre;  $x$  est implicite dans  $y$ , explicite dans  $f[x]$ , muet dans  $x \mapsto f[x]$ ;  $x$  est l'argument de  $f$  dans  $f[x]$  ou  $f_x$ , et  $\bullet$  est la variable anonyme de la fonction pure  $f[\bullet]$ .

La définition 1.1 laisse *toute liberté* de notation de la valeur  $y$  : en particulier, dans (1.1), on peut écrire  $y = f[x]$  ou  $y = f_x$ , voire  $y = f(x)$ ,  $y = fx$ , quand le contexte permet d'éviter une confusion avec une multiplication.

Réduire une fonction ( $f[x] \in F, x \in E$ ) à sa valeur  $f[x]$ , à sa partie formelle  $x \mapsto f[x]$ , ou même au symbole  $f$  est une erreur catastrophique.

**Définition 1.2.** *Une fonction  $f \in \mathbf{F}[E, F]$  est constante,  $f = \text{cst}$ , si*

$$\exists y \in F, \forall (x \in E, \exists f[x] \in F), f[x] = y.$$

Un même symbole (comme  $+$ ) peut exprimer différentes fonctions. Cela est inévitable, car la liste des symboles est finie, alors qu'on invente toujours

de nouvelles fonctions. Si la même fonction pure  $f[\bullet]$  sert à construire diverses fonctions (par exemple  $\sin$  pour des fonctions sinusoidales), alors on écrit

$$\phi \in \mathbf{F}[E, F], \phi = (f[x] \in F, x \in E).$$

On peut utiliser le même symbole pour la fonction et la fonction pure, à l'aide d'un stratagème (voisin du cheval de Troie) :

$$f \in \mathbf{F}[E, F], \text{ten}[f] = (f[x] \in F, x \in E). \quad (1.2)$$

$\text{ten}$  est une protection syntaxique contre une interprétation auto-référente (agissant comme les guillemets en français).  $\text{ten}[f]$  est aussi la déclinaison de  $f$ . Une fonction quelconque sera déclinée par défaut comme dans (1.2). En retour, (1.2) s'interprète comme : «  $(f[x] \in F, x \in E)$  est le tenseur de  $f$  ». « Tenseur » n'est donc pas encore un concept nouveau, qui demanderait une définition, mais un effet de l'interaction entre la notation et le langage (c. f. Russel en introduction).

**Définition 1.3.** Soit  $E, A$  deux ensembles.  $A$  est une partie de  $E$ ,  $A \subset E$ , si  $\forall x \in A, x \in E$ . Soit  $\mathbf{P}[E]$  l'ensemble des parties de  $E$ .

**Théorème 1.1.** Soit  $E, F$  deux ensembles.

$$\forall A \in \mathbf{P}[E], \forall B \in \mathbf{P}[F], \mathbf{F}[A, B] \subset \mathbf{F}[E, F].$$

*Démonstration.*  $f \in \mathbf{F}[A, B]$  est aussi une fonction de  $E$  vers  $F$  (déf. 1.1).  $\square$

Attention :  $f \in \mathbf{F}[A, B]$ , en tant que fonction de  $E$  vers  $F$ , n'existe pas sur  $E \setminus A$  et n'a aucune valeur dans  $F \setminus B$ .

**Définition 1.4** (prolongement, restriction). Soit  $E, F, A, B$  quatre ensembles,  $A \subset E, B \subset F, f \in \mathbf{F}[A, B], g \in \mathbf{F}[E, F], g[A] \subset B$ .

- Un prolongement de  $f$  de  $E$  vers  $F$  est  $\bar{f} \in \mathbf{F}[E, F]$  coïncidant avec  $f$  sur  $A$ , c'est-à-dire  $\forall(x \in A, \exists f[x] \in F), f[x] = \bar{f}[x]$ .
- La restriction de  $g$  de  $A$  vers  $B$  est  $\check{g} \in \mathbf{F}[A, B]$  coïncidant avec  $g$  sur  $A$ , c'est-à-dire  $\forall(x \in A, \exists g[x] \in F), g[x] = \check{g}[x] \in B$ .

Si  $\bar{f}$  prolonge  $f$ , alors  $f$  est une restriction de  $\bar{f}$ . Si  $\check{g}$  est une restriction de  $g$ , alors  $g$  prolonge  $\check{g}$ . Un prolongement est toujours possible, mais non unique. La restriction de  $g$  de  $A$  vers  $B$  existe si et seulement si  $g[A] \subset B$ .

$\bar{f}$  n'est pas unique en général. Cependant, il peut arriver qu'une certaine condition assure l'unicité. Par exemple, une fonction polynôme de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  admet un unique prolongement *polynomial* sur  $\mathbb{R}$  (et même sur  $\mathbb{C}$ ).

Soit  $E, F$  deux ensembles,  $A, B$  des sous-ensembles de  $E, F$ , et  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$ ,  $\text{ten}[f] = (f[x] \in F, x \in E)$ . L'image de  $A$  par  $f$  dans  $F$  et l'image réciproque de  $B$  par  $f$  dans  $E$  sont

$$\begin{aligned} f[A] &= \{y \in F, \exists x \in A, y = f[x]\} = \{f[x] \in F, x \in A\}. \\ f^{-1\circ}[B] &= \{x \in E, \exists y \in B, y = f[x]\}. \end{aligned}$$

Soit  $x \in E$ . L'image de  $\{x\}$  par  $f$  est  $\{f[x]\}$ , mais on dit simplement que l'image de  $x \in E$  par  $f$  est  $f[x]$ . Un antécédent par  $f$  de  $y \in F$  dans  $E$  est un élément de  $f^{-1\circ}[\{y\}]$ .

**Définition 1.5.** Soit  $E, F$  deux ensembles. Une famille  $(y \in F, x \in E)$  est finie si  $E$  est fini. Une fonction  $(f[x] \in F, x \in E)$  est réelle si  $f[E] \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 1.6** (fonction caractéristique). Soit  $E$  un ensemble. La fonction caractéristique de  $A \subset E$  est  $(\chi_A[x] \in \mathbb{R}, x \in E)$ , telle que  $\forall x \in A, \chi_A[x] = 1, \forall x \in E \setminus A, \chi_A[x] = 0$ .

$\chi_{\bullet}$  induit une fonction sur  $\mathbf{P}[E]$ .

Exercice. Montrer que l'existence de l'ensemble de tous les ensembles (paradoxe de Cantor) est impossible. Retrouver également (dans la littérature) le paradoxe de Russel.

**Définition 1.7.** La fonction de Heaviside est

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto H[x] = \chi_{\mathbb{R}^+}[x] \end{aligned}$$

(Heaviside).

Attention :  $H[0] = 1$ .

Pour faire de  $H$  le symbole exclusif de la fonction de Heaviside (1.2) :

$$\text{ten}[H] = (H[x] \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

**Définition 1.8** (fonctionnelle). Soit  $E, F$  deux ensembles. Une fonctionnelle de  $E$  vers  $F$  est  $\mathbf{F}[\mathbf{F}[E, F], F]$ .

Fonctionnelle de Dirac de  $E$  vers  $F$  en  $x \in E$  :

$$\text{ten}[\delta_x] = (\delta_x[f] = f[x] \in \mathbb{R}, f \in \mathbf{F}[E, F]), \quad (1.3)$$

existant en  $f$  si et seulement si  $f$  existe en  $x$ .

**Définition 1.9** (fonction injective, surjective). *Soient  $E, F$  des ensembles. Une fonction  $f \in [F][E, F]$  est*

**injective** *si tout  $y \in F$  a au plus un antécédent dans  $E$  par  $f$ ,*

**surjective** *si tout  $y \in F$  a au moins un antécédent dans  $E$  par  $f$ .*

Soit  $E, F$  des ensembles et  $(f[x] \in F, x \in E)$  une fonction.

$$\forall (A, B) \subset (E, F), f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]. \quad (1.4)$$

$(f[x] \in F, x \in E)$  est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \subset (E, F), f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]. \quad (1.5)$$

**Définition 1.10** (fonction composée). *Soit  $E, F, G$  trois ensembles. La fonction composée de  $(y \in F, x \in E)$  par  $(z \in G, y \in F)$  est  $(z \in G, x \in E)$ .*

S'il n'y avait que la notation standard (1.2), alors (déf. 1.10) se réduirait à une règle du symbole  $\circ$  :

$$g \circ f[x] = g[f[x]].$$

**Définition 1.11** (famille image). *Soit  $E, F, G$  trois ensembles. La famille image de  $(f_x \in F, x \in E)$  par une fonction  $(g[y] \in G, y \in F)$  est la famille  $(g[f_x] \in G, x \in E)$ .*

D'après (déf. 1.1), les définitions 1.10 et 1.11, conformes au langage courant, sont parfaitement équivalentes.

Fonction croissante, famille ordonnée. La composée de deux fonctions croissantes est croissante. La famille image d'une famille ordonnée par une fonction croissante est une famille ordonnée.

### 1.3.1 Variable double

**Définition 1.12** (fonctions partielles). *Soit  $E, E', F$  trois ensembles et  $f \in \mathbf{F}[(E, E'), F]$ .*

$$\text{ten}[f] = (f[x, y] \in F, (x, x') \in (E, E')). \quad (1.6)$$

*La première fonction partielle de  $f$  en  $x' \in E'$  est*

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f_1[x'][x] = f[x, x']. \end{aligned}$$

*La seconde fonction partielle de  $f$  en  $x \in E$  est*

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow F \\ x' &\mapsto f_2[x][x'] = f[x, x']. \end{aligned}$$

Formellement, les membres  $x, x'$  de  $f[x, x']$ , sont appelés spécifiquement arguments.  $x', E'$  doivent être considérés comme des symboles indépendants de  $x, E$ . En contrepartie, on ne peut pas utiliser  $\bullet'$  (par exemple pour symboliser la dérivation).

**Définition 1.13.** *La fonction de Kronecker est*

$$\begin{aligned} (\mathbb{N}, \mathbb{N}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) &\mapsto \delta[i, j] \end{aligned}$$

(Kronecker).

$\delta$  n'est pas le symbole exclusif de la fonction de Kronecker. Par comparaison entre (déf. 1.13) et (déf. 1.3) avec  $E = F = \mathbb{N}$ ,

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}, \mathbb{N}), \delta[i, j] = \delta_i[\chi_{\{j\}}] = \chi_{\{j\}}[i].$$

**Définition 1.14.** *Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . La fonction porte  $x, y$  est*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto P_{x,y}[z] = H[z - x]H[y - z]. \end{aligned}$$

La fonction porte sert en théorie de l'intégrale et en traitement du signal.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}), P_{x,y} = \chi_{[x,y]}.$$

où  $[x, y]$  désigne un intervalle réel (vide si  $x > y$ ) (on devrait écrire Intervalle $[x, y]$ , mais on admettra, pour justifier la notation traditionnelle, que le symbole d'intervalle est invisible).

Exercice : en remarquant que  $x \mapsto f[x, \bullet]$  induit une fonction dont la valeur est encore une fonction, construire une fonction à valeur réelle qui ne soit pas une fonction réelle (déf. 1.5).

On peut aussi obtenir une fonction à deux variables de  $(E, E')$  vers  $F$ , en « aplatissant » une fonction  $f \in \mathbf{F}[E, \mathbf{F}[E', F]]$  (dont la valeur est encore une fonction) :

$$\begin{aligned} \forall ((x, x') \in (E, E'), \exists f[x][x'] \in F), \quad f'[x, x'] &= f[x][x'] \in E', \\ f' &\in \mathbf{F}[(E, E'), F], \\ \mathbf{F}[E, \mathbf{F}[E', F]] &\leftrightarrow \mathbf{F}[(E, E'), F]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dans (1.7),  $\leftrightarrow$  exprime l'existence d'une bijection ( $f \mapsto f'$ ).

Remarque : la définition 1.12 ne peut se généraliser à un nombre inconnu d'ensembles quelconques  $(E, E', E'')$ , parce que :

- L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas (paradoxe de Cantor).
- Comme la liste des symboles est finie, il est impossible d'exprimer un nombre arbitrairement grand d'ensembles ou de variables quelconques, sauf bien sûr par une famille. Mais alors (déf. 1.1) ils doivent tous être des parties d'un même ensemble !

Remarque. (1.3.1) et (1.3.1) sont équivalents, et (1.3.1) rejoint le paradoxe de l'ensemble de tous les symboles.

**Définition 1.15.** Soit  $E, E', F$  trois ensembles. Une fonction à deux variables ( $f[x, x'] \in F, (x, x') \in (E, E')$ ) est symétrique si

$$\forall((x, x') \in (E, E'), \exists f[x, x'], f[x', x] \in F), f[x, x'] = f[x', x].$$

Une fonction constante à deux variables est symétrique. La fonction de Kronecker est symétrique.

### 1.3.2 Application, suite, variable multiple

**Définition 1.16** (application). Une fonction ( $f[x] \in F, x \in E$ ) est une application si  $\forall x \in E, \exists f[x] \in F$ . Une injection est une application injective, une surjection est une application surjective. Soit  $\mathbf{A}[E, F]$  l'ensemble des applications de  $E$  vers  $F$ .

Les fonctions caractéristiques (déf. 1.6), les fonctions de Heaviside et de Kronecker, sont des applications.

Une fonction composée de deux applications est encore une application.

Application identique  $\text{Id}_E$  sur un ensemble  $E$ ...

Partant d'une fonction, on peut toujours construire une application, par restriction ou par prolongement (déf. 1.4). Exercice : cas de la racine carrée, a priori de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 1.2.** Soit  $E, F$  deux ensembles. Une application  $f : E \rightarrow F$  est **injective** si et seulement si  $\exists! f_1 \in \mathbf{A}[f[E], E], f_1 \circ f = \text{Id}_E$ .

**surjective** si et seulement si  $\exists f_2 \in \mathbf{A}[F, E], f \circ f_2 = \text{Id}_F$ .

*Démonstration.* Axiome du choix. □

**Définition 1.17** (bijection). Une bijection de  $E$  vers  $F$  est une application injective et surjective de  $E$  vers  $F$ .

**Théorème 1.3.** Une application  $f$  de  $E$  vers  $F$  est bijective si et seulement si il existe une unique application  $f^{-1\circ}$  de  $F$  vers  $E$ , telle que

$$f^{-1\circ} \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ f^{-1\circ} = \text{Id}_F.$$

Une application  $f$  de  $E$  vers  $E$  est bijective si et seulement si il existe une unique application  $f^{-1\circ}$  de  $E$  vers  $E$ , telle que

$$f^{-1\circ} \circ f = f \circ f^{-1\circ} = \text{Id}_E.$$

Autrement dit, une bijection est une relation biunivoque.  $f^{-1\circ}$  s'appelle l'application réciproque de  $f$ .

**Définition 1.18.** Soit  $E$  un ensemble.  $f \in \mathbf{F}[E, E]$  est une involution sur  $E$  si  $f \circ f = \text{Id}_E$ .

Une involution est une bijection de  $E$  vers  $E$ . Une bijection  $f$  est une involution si et seulement si  $f = f^{-1\circ}$ . Exemple : l'opposition  $x \mapsto -x$  sur  $\mathbb{R}$ , parce que  $-(-x) = x$ .

Permutation de  $\{1 \dots n\}$ , transposition, cycle, signature  $\epsilon[f] = \pm 1$ .

**Définition 1.19** (suite). Soit  $E$  un ensemble. Une  $E$ -suite de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est une application de  $\{1 \dots n\}$  vers  $E$ . Suite extraite... Soit  $E^{(n)}$  l'ensemble des  $E$ -suites de dimension  $n$ . On pose

$$(x_i \in E, i = 1 \dots n) = (x_1 \dots x_n) \in E^{(n)}.$$

L'ensemble des  $E$ -suites est

$$E^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E^{(n)}$$

Pour une suite, au lieu de variable, on dit indice.

Il existe une bijection évidente  $E^{(1)} \leftrightarrow E$ . En utilisant la notation positionnelle,

$$\begin{aligned} \forall x = (X_i, i = 1, 2) \in E^{(2)}, \quad x = (X_1, X_2) &\in (E, E), \\ \forall x, y \in E, \quad (z_1, z_2) = (x, y) = (z_i, i = 1, 2) &\in E^{(2)}, \\ E^{(2)} &= (E, E). \end{aligned}$$

Ainsi, dans  $(x, y)$ , c'est l'ordre typographique de gauche à droite (comme dans l'écriture grecque) qui sert de paramètre implicite.

Dans un nombre chiffré, comme  $421 = (4, 2, 1) = 10^0 1 + 10^1 2 + 10^2 4$ , c'est l'ordre typographique de droite à gauche (comme dans l'écriture arabe) qui sert de paramètre implicite.

Dans  $E^{(1)}, E^{(2)}$ , les parenthèses protègent contre l'interprétation  $E^1 = E, E^2 = EE$ , ce qui est inutile dans  $E^{\mathbb{N}}$ .

**Définition 1.20** (dimension d'une famille finie). *Soit  $E$  un ensemble fini, de cardinal  $n$ ,  $F$  un ensemble, et  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ . La dimension de la famille finie  $(f[x] \in F, x \in E)$  est  $n$ .*

On peut toujours récrire une famille finie en une suite de même dimension, sur laquelle il est plus simple de travailler, cela de plusieurs manières en général, obtenues par permutation.

**Définition 1.21** (produit contracté suite-suite). *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le produit contracté de suites  $x, y \in \mathbb{R}^{(n)}$  est, en sommant sur les indices répétés,*

$$x.y = \sum_{i=1\dots n} x_i y_i = x_i y_i.$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{(n)}, x.y = y.x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

**Définition 1.22** ( $n$ -fonction). *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E, F$  des ensembles. Une  $n$ -fonction de  $E$  vers  $F$  est un élément de  $\mathbf{F}[E^{(n)}, F]$ . Soit  $f \in \mathbf{F}[E^{(n)}, F]$ ,  $\text{ten}[f] = (f[x] \in F, x \in E^{(n)})$ . Pour tout  $x \in E_n$ , pour tout  $i = 1 \dots n$ , soit*

$$x_{(i)} = (x_j, j = 1 \dots n, j \neq i)$$

une suite extraite de  $x$ . La  $i^e$  fonction partielle de  $f$  en  $x_{(i)}$  est

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x_i &\mapsto f_i[x_{(i)}][x_i] = f[x]. \end{aligned}$$

$n$ -application...

$$\mathbf{F}[E^{(1)}, F] \leftrightarrow \mathbf{F}[E, F], \quad \mathbf{F}[E^{(2)}, F] = \mathbf{F}[(E, E), F].$$

Remarque : la définition 1.22, pour  $n \geq 2$ , généralise partiellement la définition 1.12, en échappant au paradoxe de Cantor.

**Définition 1.23.**  $n$ -fonction symétrique...

**Définition 1.24.** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E^{(n)} \rightarrow E$ .  $F \subset E$  est stable pour  $f$ , si  $\forall x \in F^{(n)}, \exists f[x] \in F$ .

Justification : d'après (thé. 1.1),  $F^{(n)} \subset E^{(n)}$ .

**Définition 1.25.** Soit  $E$  un ensemble,  $f : E^{(n)} \rightarrow E$  et  $\sim$  une relation dans  $E$ .  $f$  est compatible avec  $\sim$  si  $\forall (x, y \in E^{(n)}, \text{ten}[x] = (x_i, i = 1 \dots n), \text{ten}[y] = (y_i, i = 1 \dots n), \exists f[x], f[y] \in E), ((\forall i = 1 \dots n, x_i \sim y_i) \Rightarrow f[x] \sim f[y])$ .

$f$  est évidemment compatible avec l'égalité. Avec  $n = 1$  et une relation d'ordre,  $f$  est compatible avec  $\leq$  si et seulement si elle est croissante.

### 1.3.3 Groupe, transformée, variance, morphisme

**Définition 1.26** (loi). Une loi interne d'un ensemble  $E$  est une application de  $(E, E)$  vers  $E$ , comme  $u = (x * y \in E, (x, y) \in E)$ ,

**associative** si  $\forall x, y, z \in E, x * (y * z) = x * y * z$ ,

**commutative** si  $\forall x, y \in E, x * y = y * x$ .

Loi externe...

On symbolise une loi interne associative (commutative) par une opération plate (symétrique), une loi interne associative et commutative par une opération sans ordre. Comme l'économie de symbole force à réutiliser un même symbole pour plusieurs lois, il est nécessaire de pouvoir distinguer la loi de son symbole, et cela a été prévu.

Élément neutre, élément symétrique à gauche ou à droite... Avec l'addition  $+$ , au lieu de neutre ou symétrique, on dit, spécifiquement, zéro ou opposé. Avec la multiplication ou  $\cdot, \circ$ , au lieu d'élément neutre ou symétrique, on dit, spécifiquement, unité ou inverse. Loi compatible avec une relation (déf. 1.25).

**Définition 1.27** (semigroupe, groupe). ... *Semi-groupe : sans condition d'inversibilité.*

La définition 1.27 est induit du théorème 1.3.

Dans un groupe additif, zéro est  $0$  et l'opposé de  $x$  est  $-x$ . Dans un groupe multiplicatif, l'unité n'a pas de symbole a priori, et la notation de l'inverse reprend le symbole de la loi interne, comme  $f \circ f^{-1\circ} = \text{Id}_E$ .

Semi-groupe  $(\mathbb{N}, +)$ , groupe  $(\mathbb{Z}, +)$ , semigroupes multiplicatifs  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ .

Soit  $E$  un ensemble.  $(\mathbf{F}[E, E], \circ)$  est un semigroupe, d'élément neutre  $\text{Id}_E$ . Groupe des bijections  $\phi : E \rightarrow E$ . Orbite de  $\phi$  ou sous-groupe engendré par  $\phi$  :

$$G_\phi = \{\phi^{k\circ}, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.9)$$

En mécanique, en supposant un temps « homogène », une évolution (ir)réversible peut être représentée par une (semi)orbite. Aller d'hier à demain est comme aller d'hier à aujourd'hui, puis d'aujourd'hui à demain. L'évolution inverse nécessite de défaire exactement tout ce qui a été fait, ce qui est presque toujours impossible en mécanique statistique, à cause de la complexité.

Soit  $(E, u)$ ,  $(F, v)$  deux ensembles chacun muni d'une loi interne. La loi interne canonique de  $(E, F)$  est

$$\begin{aligned} ((E, F), (E, F)) &\rightarrow (E, F) \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (u[x, x'], v[y, y']). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Si  $(E, u)$ ,  $(F, v)$  sont deux groupes, alors  $(E, F)$ , muni de la loi canonique (1.10) est un groupe. Quel est l'élément neutre canonique ?

Soit  $E$  un ensemble et  $(F, v)$  un ensemble muni d'une loi interne. La loi interne canonique de  $\mathbf{F}[E, F]$  est

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}[E, F], \mathbf{F}[E, F]) &\rightarrow \mathbf{F}[E, F] \\ (f, f') &\mapsto v[f, f'], \\ \forall (x \in E, \exists f[x], f'[x] \in F), & v[f, f'][x] = v[f[x], f'[x]]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Soit  $(F, v)$  un groupe.  $(\mathbf{A}[E, F], v)$  est un groupe, dont l'élément neutre est l'application neutre de  $E$  vers  $F$ , qui a tout élément de  $E$  associe l'élément neutre de  $F$ .  $(\mathbf{F}[E, F], v)$  est-il un groupe ?

Soit  $(E, u)$  un groupe. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E^{(n)}, u)$  est un groupe. Quel est son élément neutre ?

Groupe des permutations  $f$  d'un ensemble fini, transposition, cycle, signature  $\epsilon[f] = \pm 1 \dots$

Structures algébriques à deux lois internes : anneau, algèbre. Sous-structures, structures ordonnées, sous-structures ordonnées.

Remarque. Pour la mécanique, mieux vaut éviter à ce stade de définir un corps. Cela ne pose aucun problème, tant que les espaces vectoriels s'appuient sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.28.** Soit  $E, E', F$  trois ensembles et  $\phi : E \rightarrow E'$  une bijection (déf. 1.17). Soit  $x \in E$  et  $x' = \phi[x]$ . La transformée par  $\phi$  de  $f : E \rightarrow F$  est

$$f' : E' \rightarrow F, \forall x' \in E', f'[x'] = f[x].$$

La transformation par  $\phi$  est

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[E, F] &\rightarrow \mathbf{F}[E', F] \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

Justification : d'abord, comme  $\phi$  est injective,  $x'$  étant donné,  $x$  est unique ; ensuite, comme  $\phi$  est surjective, elle a un inverse à droite pour  $\circ$  (thé. 1.2), donc  $f'$  existe et est unique,

$$f' \circ \phi = f, \quad f' = f \circ \phi^{-1\circ},$$

si bien que la transformation est une application.

Formellement : si, dans  $f[x]$ , on remplace  $x$  par  $x'$ , alors on conserve une expression identique en remplaçant  $f$  par  $f'$ .

**Définition 1.29** (invariance). *Suite à (déf. 1.28),  $f$  est invariante par  $\phi$ , ou  $\phi$  conserve  $f$ , si  $f' = f$ .*

**Théorème 1.4.**  *$f$  est invariante par  $\phi$  si et seulement si  $f \circ \phi = f$ .*

Ainsi, il n'est pas nécessaire d'inverser  $\phi$  pour prouver l'invariance, mais, pour pouvoir en parler, il faut que  $\phi$  soit inversible.

**Définition 1.30** (variance). *Suite à (déf. 1.28), avec  $E' = E$ ,  $f$  est de variance  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $k$ -variante par  $\phi$  si*

$$f \circ \phi^{-1\circ} = \phi^{-k\circ} \circ f.$$

*En particulier,  $f$  est covariante si  $f$  est 1-variante, contravariante si  $f$  est -1-variante.*

Formellement :  $\phi$  agissant sur  $x$ ,  $f$  est invariante, covariante ou contravariante par  $\phi$ , selon que que  $f[x]$  ne varie pas, varie comme  $x$  ou à l'inverse de  $x$ .

Si  $f$  est 0-variante, alors  $f$  est invariante.  $f$  est covariante par  $\phi$  si et seulement si  $f$  et  $\phi$  commutent,

$$f \circ \phi = \phi \circ f.$$

Ainsi, il n'est pas nécessaire d'inverser  $\phi$  pour prouver la covariance, mais, pour pouvoir en parler, il faut que  $\phi$  soit inversible. Et pour la contravariance ?

**Définition 1.31** (morphisme de loi). *Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi interne  $u$ . Soit  $F$  un ensemble muni d'une loi interne  $v$ . Une application  $f : E \rightarrow F$  est*

- un morphisme de loi de  $(E, u)$  vers  $(F, v)$  si  $\forall x, y \in E, f[u[x, y]] = v[f[x], f[y]]$ ,
- un isomorphisme si  $f$  est bijective,
- un endomorphisme sur  $(E, u)$  si  $(E, u) = (F, v)$ ,

- un automorphisme si endo- et iso-,
- un antimorphisme si  $\forall x, y \in E, f[u[x, y]] = v[f[y], f[x]]$ .

Remarque. Il est rigoureusement impossible de définir en général un morphisme (Cantor). Mais on le fait cas par cas. Cependant, si on dit, vaguement, qu'un morphisme exprime une analogie de comportement, alors la définition de morphisme devient évidente dans la plupart des cas. Morphisme n'est donc pas un concept logique, mais une structure psychologique, ou une connaissance synthétique a priori [15]. Exercice : définir un morphisme de groupe.

Exemples :

- La fonction logarithme, isomorphisme du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^{+*}$  vers  $(\mathbb{R}, +)$  :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \log[xy] &= \log[x] + \log[y], & (1.12) \\ \log\left[\frac{1}{x}\right] &= -\log[x], \log[1] = 0. \end{aligned}$$

- Une injection  $f : E \rightarrow E$  induit avec (1.5) un endomorphisme sur  $(\mathbf{P}[E], \cap)$ .
- Suite à (1.9), voici un morphisme surjectif de groupe :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow G_\phi \\ k &\mapsto \phi^{k \circ}. \end{aligned}$$

Inversement,  $G_\phi$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  modulo un entier.

Y a-t-il un lien entre morphisme de loi interne et variance? Suite à (déf. 1.31), soit  $f$  un automorphisme sur  $(E, u)$ .

$$\forall x, y \in E, f[u[x, y]] = u[f[x], f[y]].$$

**Définition 1.32.** Soit  $E$  un ensemble, muni d'une loi interne  $u$ , et  $f$  une bijection de  $E$  vers  $E$ .  $u$  est covariante par  $f$  à la distribution de  $f$  près si

$$\forall x, y \in E, f[u[x, y]] = u[f[x], f[y]].$$

**Théorème 1.5.**  $f$  est un automorphisme de loi interne pour  $u$  si et seulement si  $u$  est covariante par  $f$  à la distribution de  $f$  près.

**Définition 1.33.** – Soit  $E$  un ensemble et  $(F, +)$  un groupe. Une fonction  $(f[x] \in F, x \in E)$  vers  $F$  est nulle si  $\forall(x \in E, \exists f[x] \in F), f[x] = 0$ .

- Soit  $(E, +)$  un groupe et  $F$  un ensemble. Une fonction  $(f[x] \in F, x \in E)$  vers  $F$  est paire si  $\forall(x \in E, \exists f[x] \in F), f[-x] = f[x]$ .
- Soit  $(E, +)$  et  $(F, +)$  deux groupes. Une fonction  $(f[x] \in F, x \in E)$  vers  $F$  est impaire si  $\forall(x \in E, \exists f[x] \in F), f[-x] = -f[x]$ .

Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est paire si et seulement si elle est invariante par opposition; une fonction  $f : E \rightarrow E$  est impaire si et seulement si elle est covariante par opposition (déf. 1.30).

Attention : il y a en général plusieurs fonctions nulles de  $E$  vers  $F$ , mais une seule application nulle.

L'application nulle de  $E$  vers  $E$  est paire, impaire, et  $k$ -variante par opposition, quel que soit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Définition 1.34.** Soit  $E, E', F$  trois groupes additifs. Une fonction à deux variables  $(f[x, x'] \in F, (x, x') \in (E, E'))$  est

**non-dégénérée** si  $\forall(x, x') \in (E, E'), (f[x, x'] = 0 \Rightarrow (x, x') = (0, 0))$ ,

**antisymétrique** si  $\forall((x, x') \in (E, E'), \exists f[x, x'], f[x', x] \in F), f[x, x'] = -f[x', x]$ .

**Définition 1.35.** Soit  $E, F$  deux groupes additifs et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une  $n$ -fonction  $(f[x] \in F, x \in E^{(n)})$  est

**non-dégénérée** si  $\forall x \in E^{(n)}, (f[x] = 0 \Rightarrow x = 0)$ ,

**antisymétrique** si...

Exercice : compléter (déf. 1.35) à l'aide de transpositions (ou de permutations).

Soit  $(E, +)$  un groupe non trivial ( $E \neq \{0\}$ ). Toute application  $(f[x, y] \in \mathbb{R}, x, y \in E)$  antisymétrique est dégénérée :

$$\forall x \in E, f[x, x] = -f[x, x], 2f[x, x] = 0, f[x, x] = 0, \quad (1.13)$$

$$\exists x \in E^*, (x, x) \neq 0, f[x, x] = 0. \quad (1.14)$$

Exercice : parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont non-dégénérées ?

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2, \\ &\mapsto x - y, \\ &\mapsto x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Soit  $f : (E, E) \rightarrow F$  une fonction symétrique ou antisymétrique, et  $g : F \rightarrow F$  une fonction paire ou impaire. Si  $g$  est paire, alors  $g \circ f$  est symétrique

ou antisymétrique comme  $f$ , sinon  $g \circ f$  est symétrique ou antisymétrique à l'inverse de  $f$ .

Autrement dit, la composition par une fonction paire ( $g \circ \bullet$ ) conserve la symétrie, alors que la composition par une fonction impaire la renverse, ou encore, la symétrie est invariante par composition paire, contravariante par composition impaire. Cette « gymnastique » sur la variance est typique de l'usage de la symétrie en mécanique et en physique. Dans des situations peu claires, il faut identifier les fonctions agissant dans (déf. 1.30).

## 1.4 Espace vectoriel, espace affine

**Définition 1.36** (espace vectoriel). ...

Vecteur : élément d'un espace vectoriel.

**Définition 1.37** (opérateur, forme). Soit  $E$  un espace vectoriel.

**Opérateur** sur  $E$  : application de  $E$  vers  $E$ .

**Forme** sur  $E$  : application de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.38** (espace affine).

Vocabulaire spatial. Point : élément d'un espace. Partout : en tout point. Nulle part : en aucun point. Quelque part : en au moins un point. Fonction uniforme : constante (déf. 1.2) sur un espace affine.

**Définition 1.39** (position). Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un espace vectoriel  $E$ . Soit  $O, M \in \mathcal{E}$ . La position de  $M$  depuis l'origine  $O$  est

$$r_M = M \ominus O = \overrightarrow{OM}.$$

L'usage de  $\ominus$ , plutôt que  $-$ , prévient l'usage insensé de la règle  $-x = (-1)x$  pour  $x \in \mathcal{E}$ .

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, r_M - r_N = M \ominus N \in E. \quad (1.15)$$

Tout espace vectoriel est un espace affine sur lui-même (et dans ce cas  $\ominus$  se réduit à  $-$ ).

Soit  $E, F$  des espaces vectoriels.  $(E, F)$  est encore un espace vectoriel, pour des lois canoniques (1.10). Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces affines sur des espaces vectoriels  $E, F$ .  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , muni des lois canoniques, est encore un espace affine, sur l'espace vectoriel  $(E, F)$ .

Soit  $E$  un ensemble,  $F$  un espace vectoriel.  $\mathbf{A}[E, F]$  est encore un espace vectoriel, pour les lois canoniques,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbf{A}[E, F], \forall x \in E, (\alpha f + g)[x] = \alpha f[x] + g[x].$$

En particulier (déf. 1.19), si  $E$  est un espace vectoriel, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E^{(n)}$  est un espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel, sous-espace affine, direction, parallélisme. . .

**Théorème 1.6.** *Par un point d'un espace affine, il passe un unique sous-espace affine parallèle à un sous-espace affine donnée (Euclide).*

### 1.4.1 Espace vectoriel ordonné

**Définition 1.40** (espace vectoriel ordonné). *Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\leq$  une relation d'ordre dans  $E$ , tels que*

- la loi interne  $+$  de  $E$  est compatible (déf. 1.25) avec  $\leq$ ,
- toute homothétie de rapport réel positif est croissante,
- l'opposition est décroissante,
- $x, y \in E$  ont un supremum (plus petit majorant)  $x \vee y = \sup\{x, y\} \in E$ .

Toute homothétie de rapport négatif est décroissante.  $x, y \in E$  ont un infimum (plus grand minorant),

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad -(x \wedge y) = (-x) \vee (-y).$$

Isomorphismes de règle (ordinaire, ensembliste et logique) :

$$\begin{aligned} x \leq (x \vee y) &\leftrightarrow x \subset (x \cup y) &\leftrightarrow x \Rightarrow (x \vee y), \\ x \wedge y \leq x &\leftrightarrow x \cap y \subset x &\leftrightarrow x, y \Rightarrow x, \end{aligned}$$

$\vee$  symbolise « ou » en logique (dans la dernière colonne).

**Théorème 1.7.** *Un espace vectoriel  $E$ , muni d'une relation  $\leq$ , est ordonné si et seulement si*

$$\begin{aligned} \exists E^\pm \subset E, \quad E^- = -E^+, \quad E^+ \cap E^- = \{0\}, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in E^+, \quad \alpha x + y \in E^+, \\ \forall x, y \in E, \quad (x \leq y \Leftrightarrow y - x \in E^+), \\ \forall x \in E, \quad \exists!(x^+, x^-) \in (E^+, E^+), \quad x = x^+ - x^-, \\ \forall((y, z) \in (E^+, E^+), \quad x = y - z), \quad x^+ \leq y, \quad x^- \leq z. \end{aligned}$$

*Démonstration.* La condition est nécessaire : on vérifie que  $E^\pm = \{x \in E, \pm x \geq 0\}$  et  $x^\pm = \pm x \vee 0$  conviennent. Soit  $(y, z) \in (E^+, E^+)$ ,  $x = y - z$ .  $y = x + z \geq x$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \geq x^+$  et, symétriquement,  $-x = z - y$ ,  $z = -x + y \geq -x$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \geq x^-$ .

La condition est suffisante :  $\leq$  est une relation d'ordre (réflexive, anti-symétrique, transitive), et  $x, y \in E$  ont un supremum :  $y + (x - y)^+ = y + ((x - y) \vee 0) = x \vee y$ .  $\square$

**Définition 1.41.** Les parties positive et négative et la valeur absolue de  $x \in E$  sont  $x^\pm = \pm x \vee 0$ ,  $|x| = x^+ + x^-$ . De même, les parties positive et négative de  $E$  sont  $E^\pm$ .

Attention :  $x^- \in E^+$ .

**Définition 1.42.** Soit  $(E, \leq)$  un espace vectoriel ordonné. Un sous-espace vectoriel  $F$  est ordonné si  $(F, \leq)$  est un espace vectoriel ordonné.

**Théorème 1.8.**  $F$  est un sous-espace vectoriel ordonné si et seulement si  $\forall x \in F, x^+ \in F$ . Alors,  $F^+ = F \cap E^+$

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels ordonnés. L'espace vectoriel  $(E, F)$  est encore ordonné, pour l'ordre canonique,

$$\forall (x, y) \in (E, F), ((x, y) \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0, y \geq 0)). \quad (1.16)$$

De même, pour tout  $n \geq 1$ ,  $E^{(n)}$  est encore un espace vectoriel ordonné.

**Définition 1.43.** Soit  $E$  un ensemble,  $F$  un ensemble ordonné,  $B \subset F$  et  $f \in \mathbf{F}[E, B]$ .  $f$  est positive, si  $f[E] \subset F^+$ . Soit  $E$  un espace vectoriel ordonné.  $f$  est positivement non-dégénérée si

$$\forall x \in E^+, (f[x] = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $\mathbf{A}[P, A]$  est ordonné.

$\mathbb{R}$  est un espace vectoriel ordonné. En outre, l'ordre réel est total,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{(2)}, (x \leq y) \vee (y \leq x),$$

$$\begin{cases} x \vee y + x \wedge y = x + y \\ x \vee y - x \wedge y = |x - y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \end{cases} \quad (1.17)$$

Exercice. Montrer que  $\mathbb{R}^{(2)}$  est un espace vectoriel ordonné, dessiner le supremum et l'infimum de deux éléments. Quels sont les sous-espaces vectoriels ordonnés de  $\mathbb{R}^{(2)}$  ?

### 1.4.2 Dimension finie, rang

Famille libre de vecteur, famille affinement libre de point. Sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}.x$  (déf. 1.21) engendré par une famille finie de vecteur  $x$ , sous-espace affine engendré par une famille finie de point. Base, repère. Droite, plan vectoriel ou affine.

**Théorème 1.9** (de la dimension). *Dans un espace vectoriel  $E$  possédant au moins une famille génératrice finie, il existe au moins une base et toutes ont la même dimension (déf. 1.20).*

La dimension de  $E$  est celle de ses bases et aussi l'unique entier  $n$ , tel que, pour toute famille finie  $x$  de dimension  $p$  de  $E$  (déf. 1.20),

- si  $p > n$ , alors  $x$  est liée (non-libre),
- si  $p < n$ , alors  $x$  est non-génératrice,
- si  $p = n$ , alors  $x$  est génératrice si et seulement si  $x$  est libre si et seulement si  $x$  est une base.

**Définition 1.44** (tenseur d'un vecteur dans une base). *Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $e$ , réécrite en  $E$ -suite,  $\text{ten}[e] = (e_i, i = 1 \dots n)$ . Le tenseur d'un vecteur, en sommant sur les indices répétés,  $x = X_i e_i \in E$  dans la base  $e$  est*

$$\text{ten}_e[x] = (X_i, i = 1 \dots n).$$

Justification : la décomposition linéaire d'un vecteur dans une base est unique.

Pour économiser un symbole, en se mettant à l'abri de l'auto-référence (1.2),

$$\text{ten}_e[x] = (x_i, i = 1 \dots n).$$

Au prix d'une extension évidente de (déf. 1.21),

$$\forall x \in E = \mathbb{R}.e, x = \text{ten}_e[x].e. \quad (1.18)$$

Remarque : l'auto-référence de (1.18) n'est pas gênante, parce que (1.26) n'est pas une définition, mais un théorème. En fait, alors qu'une définition auto-référente est un non-sens, un théorème auto-référent, par exemple, un théorème de point fixe, peut-être infiniment riche.

**Théorème 1.10.** *Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{R}^{(n)}$  est un espace vectoriel ordonné de dimension  $n$ , de base canonique*

$$((\delta[i, j], i = 1 \dots n), j = 1 \dots n) = ((\delta[i, j], j = 1 \dots n), i = 1 \dots n).$$

*Démonstration.*  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel ordonné, donc  $\mathbb{R}^{(n)}$  aussi (pour l'ordre canonique). Décomposition canonique : en sommant sur les indices répétés,

$$(x_1 \dots x_n) = x_i(\delta[i, j], j = 1 \dots n) = x_j(\delta[i, j], i = 1 \dots n).$$

□

Soit  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$ ,  $\text{ten}[x] = (x_i, i = 1 \dots n)$  (1.2).  $\text{ten}[x]$  est également le tenseur de  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{(n)}$  (déf. 1.44). Cela justifie l'emploi de  $\text{ten}$  pour exprimer les coordonnées dans une base.

Un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ , muni d'une base  $e$ , est linéairement isomorphe à  $\mathbb{R}^{(n)}$ , via

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^{(n)} \\ x &\mapsto \text{ten}_e[x]. \end{aligned}$$

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, respectivement  $n, p$ . L'espace vectoriel  $(E, F)$  est de dimension  $n + p$ . Construction d'une base par concaténation...

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .  $E^{(p)}$  est de dimension  $np$ .

**Définition 1.45.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Le rang d'une famille finie de  $E$  est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre dans  $E$ .*

Quel est le rang  $r$  d'une famille finie  $x$  de dimension  $p$  de  $E$  espace vectoriel de dimension  $n$ ? Si  $x$  est une base, alors  $r = p = n$ ; si  $x$  contient au moins un vecteur non-nul, alors  $r \geq 1$ ; en général,

$$0 \leq r \leq n \wedge p, \quad (1.19)$$

mais existe-t-il un déterminant du rang?

### 1.4.3 Champ

**Définition 1.46** (champ). *Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un espace vectoriel  $E$  et  $F$  un espace vectoriel. Un champ de  $\mathcal{E}$  vers  $F$  est une fonction de  $\mathcal{E}$  vers  $F$ . Le moment d'un champ  $f$  de  $\mathcal{E}$  vers  $F$  en un point de  $\mathcal{E}$  est sa valeur en ce point.*

Le champ  $(r_M \in E, M \in \mathcal{E})$  (déf. 1.39) réalise un isomorphisme affine de  $(\mathcal{E}, \ominus)$  vers  $(E, -)$  (1.15).

FIG. 1.1 – Un champ de vecteur

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine sur un plan vectoriel  $E$  et un un champ ( $f_M \in E$ ,  $M \in \mathcal{E}$ ). On trace dans le plan, à partir de chaque point  $M$ , le vecteur  $f_M$  (fig. 1.1). Exercices. Tracer et comparer le champ de position et le champ de vitesse d'un disque tournant. Comment représenter sur le plan un champ réel, un champ à trois composantes ?

**Définition 1.47** (partie vectorielle, réduction). *Soit  $\mathcal{F}$  un espace affine sur un espace vectoriel  $F$  et  $f \in \mathbf{F}[\mathcal{E}, \mathcal{F}]$ , existant au moins en  $O \in \mathcal{E}$ . La partie vectorielle de  $f$  en  $O$  est*

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f_O[x] = f[O + x] \ominus f[O]. \end{aligned}$$

La réduction de  $f$  en  $O$  est  $(f_O, f[O])$ .

La définition 1.47 s'applique aussi à un champ de  $\mathcal{E}$  vers  $F$ , en rappelant que l'espace vectoriel d'arrivée  $F$  est aussi un espace affine sur  $F$ .

Suite à (déf. 1.47),  $f$  est uniquement déterminée par sa réduction en un point :

$$f_O[0] = 0, \forall(O, M \in \mathcal{E}, \exists f[M] \in \mathcal{F}), f[M] = f[O] + f_O[r_M].$$

Si  $f$  est une application, alors  $(f_O \in \mathbf{A}[E, F], O \in \mathcal{E})$  est un champ.

Inversement, à partir de  $g \in \mathbf{F}[E, F]$  existant au moins en  $0$ , voici un champ dont la partie vectorielle est  $g$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\rightarrow F \\ M &\mapsto g_{O,M} = g[r_M], \end{aligned} \tag{1.20}$$

et  $g_{O,\bullet} = g[r_\bullet] = g \circ r_\bullet$  détermine uniquement  $g$  :

$$g_{O,O} = g[0], \forall O \in \mathcal{E}, \forall(x \in E, \exists g[x] \in F), g[x] = g_{O,O+x}.$$

Si  $g$  est une application, alors  $((g_{O,M} \in F, M \in \mathcal{E}) \in \mathbf{A}[\mathcal{E}, F], O \in \mathcal{E})$  est un champ.

Exercice : soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $f_O : E \rightarrow F$  (déf. 1.47), puis  $(f_O)_O : \mathcal{E} \rightarrow F$  (1.20). Comparer  $f$  et  $(f_O)_O$ .

### 1.4.4 Application linéaire, application affine

**Définition 1.48** (fonction homogène). Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $E, F$  deux espaces vectoriels. Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est

**homogène** de degré  $k$ , ou  $k$ -homogène, si

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x \in E, \exists f[x] \in F), f[\alpha x] = \alpha^k f[x].$$

**positivement homogène** de degré  $k \in \mathbb{R}^+$  si

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (x \in E, \exists f[x] \in F), f[\alpha x] = \alpha^k f[x].$$

Une fonction (positivement) homogène existe au moins sur un (demi) cône.

Exercice : vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{sg}[x] = H[x] - H[-x] \end{aligned} \quad (1.21)$$

donne le signe d'un nombre non-nul. Est-elle homogène ?

Suite à (déf. 1.48),  $f$  est homogène de degré zéro si et seulement si  $f$  est invariante par homothétie. Si de plus  $E = F$ , alors  $f$  est  $k$ -homogène si et seulement si elle est  $k$ -variante par homothétie (déf. 1.30).

Attention : la transformée (déf. 1.28) de  $f$   $k$ -homogène par l'homothétie  $\phi = (\alpha x \in E, x \in E), \alpha \in \mathbb{R}^*$  est

$$f' = f \circ \phi^{-1\circ} = \phi^{-k\circ} \circ f = \alpha^{-k} f. \quad (1.22)$$

Les considérations sur les unités (de longueur, masse, temps, prix) reposent entièrement sur les fonctions homogènes (application triviale : le théorème  $\pi$  (Vashy-Buckingham)).

**Définition 1.49** (application linéaire). Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels. Une application linéaire de  $E$  vers  $F$  est

$$f \in \mathbf{A}[E, F], \forall (\alpha, x, y) \in (\mathbb{R}, E, E), f[\alpha x + y] = \alpha f[x] + f[y].$$

Un opérateur linéaire sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $E$ . Une forme linéaire sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathbf{Li}[E, F]$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  vers  $F$ . Le dual algébrique de  $E$  est  $\mathbf{Li}[E, \mathbb{R}]$ .

Une application linéaire est une application additive et homogène de degré un ou un morphisme d'espace vectoriel. Un opérateur linéaire est un endomorphisme d'espace vectoriel.

La fonctionnelle de Dirac de  $E$  vers  $F$  en  $x \in E$  (1.3) induit une application linéaire de l'espace vectoriel  $\mathbf{A}[E, F]$  vers  $F$ .

**Définition 1.50** (application affine). *Soit deux espaces affines  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  sur des espaces vectoriels  $E, F$ . Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ , de partie vectorielle  $f_O$  (déf. 1.47), est affine si*

$$\exists \text{Li}[f] \in \mathbf{Li}[E, F], \forall O \in \mathcal{E}, f_O = \text{Li}[f],$$

et alors la partie linéaire de  $f$  est  $\text{Li}[f]$ .

Le champ partie vectorielle ( $O \mapsto f_O$ ) d'une application affine ( $f$ ) est uniforme et sa valeur est sa partie linéaire ( $\text{Li}[f]$ ).

Les translations sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité, les affinités sont les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie.

Une application linéaire (affine) transforme un sous-espace vectoriel (affine) en sous-espace vectoriel (affine). Image, noyau d'une application linéaire. . .

**Définition 1.51.** *Soit  $E, F$  des espaces vectoriels de dimension finie. Le rang d'une application linéaire  $f \in \mathbf{Li}[E, F]$  est la dimension de l'espace vectoriel  $f[E]$ .*

Le rang de  $f$  est aussi la dimension de  $E$ , moins la dimension du noyau de  $f$ .

**Théorème 1.11.** *Une application linéaire est injective si et seulement si elle est non-dégénérée (déf. 1.35) si et seulement si elle conserve le rang. Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang égale la dimension de son espace vectoriel d'arrivée.*

Équation linéaire, équation affine. Une équation linéaire « avec second membre » ou « avec terme source » ou « inhomogène » est une équation affine.

**Théorème 1.12.** – *La famille image d'une famille liée par une application linéaire (déf. 1.11) est encore une famille liée.*  
– *La famille image d'une famille libre par une application linéaire injective est encore une famille libre.*

- La famille image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est encore une famille génératrice.

Soit  $e$  une base de  $E$ .  $f \in \mathbf{Li}[E, F]$  est entièrement déterminée par la famille image  $f[e]$  (déf. 1.11) et  $f[E] = \mathbb{R}.f[e]$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . Le rang de  $x$  est encore le rang de  $f[e]$ .

$\mathbf{Li}[E, F]$  est un espace vectoriel et  $(\mathbf{Li}[E, E], \circ)$  est un semigroupe. Groupe des automorphismes linéaires... Algèbre...

**Définition 1.52** (tenseur d'une forme linéaire). *Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $e$  de dimension  $n$ . Le tenseur dans la base  $e$  d'une forme linéaire  $\mu$  sur  $E$  est la famille image  $\mu[e]$  (déf. 1.11).*

$$\forall \mu \in \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}], \text{ten}_e[\mu] = \mu[e].$$

Avec (déf. 1.21), et pour toute base  $e$ ,

$$\forall \mu \in \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}], \forall x \in E, \mu[x] = \text{ten}_e[x]. \text{ten}_e[\mu].$$

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  un espace vectoriel ordonné et  $\mu \in \mathbf{Li}[E, F]$ . Sauf cas triviaux ( $\mu = 0$  ou  $E = \{0\}$ ),  $\mu$  n'a aucune chance d'être positive (1.43), parce que  $\exists x \in E^*, \mu[x] > 0, \mu[-x] = -\mu[x] < 0$ .

**Définition 1.53** (application linéaire positive). *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels ordonnés et  $f \in \mathbf{Li}[E, F]$ .  $f$  est positive,  $f \in \mathbf{Li}[E, F]^+$ , si  $\forall x \in E^+, f[x] \in F^+$ .*

Justification : l'application linéaire nulle de  $E$  vers  $F$ , seule concernée à la fois par (déf. 1.43) et (déf. 1.53), est heureusement positive dans les deux sens.

$\mathbf{Li}[E, F]$  est un espace vectoriel ordonné.

**Théorème 1.13.** *Toute application linéaire positive est croissante.*

**Définition 1.54** (covariance affine). *Un champ  $f \in \mathbf{F}[\mathcal{E}, E]$  est de variance  $k \in \mathbb{Z}$  par une application affine bijective  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  si*

$$f \circ \phi^{-1\circ} = \mathbf{Li}[\phi]^{-k\circ} \circ f.$$

En effet, par contraste avec (déf. 1.30), le vecteur  $f_M$  ne saurait varier comme le point  $M$  que pour la partie linéaire de  $\phi$ .

**Définition 1.55** (champ affine). *Un champ  $f : \mathcal{E} \rightarrow F$  est affine si  $f$  est une application affine, en considérant  $F$  comme un espace affine sur  $F$ .*

Le champ de position  $r$  est un champ affine. Quelle est sa partie linéaire ?

### 1.4.5 Somme directe de sous-espaces vectoriels

**Définition 1.56.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $e$  une famille finie de sous-espace vectoriel, réécrite en suite,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ .  $E$  est la somme directe de  $(e_i, i = 1 \dots n)$ ,

$$E = \bigoplus_{i=1 \dots n} e_i = e_1 \oplus \dots \oplus e_n,$$

si

$$\forall x \in E, \forall i = 1 \dots n, \exists ! X_i \in e_i, x = \sum_{i=1 \dots n} X_i.$$

**Théorème 1.14.** Soit  $(E, +)$  un groupe et  $F$  un espace vectoriel. L'espace vectoriel  $\mathbf{A}[A, F]$  est la somme directe des sous-espaces vectoriels des applications paires et impaires de  $E$  vers  $F$ , et la décomposition paire-impair de  $f \in \mathbf{A}[A, F]$  est

$$f[x] = \frac{1}{2}(f[x] + f[-x]) + \frac{1}{2}(f[x] - f[-x]).$$

Projection, symétrie : définition sur une somme directe. . . Caractérisation indépendante des sous-espaces vectoriels : un opérateur  $f$  sur  $E$  est une

**projection** si et seulement si  $f \circ f = f$ ,

**symétrie** si et seulement si  $f \circ f = \text{Id}_E$  (déf. 1.18).

Sous-espace vectoriel propre pour une application linéaire. Valeur et vecteur propre pour une application linéaire. Une somme de sous-espaces vectoriels propres est toujours directe, mais ne remplit pas forcément tout l'espace vectoriel.

**Définition 1.57.** Un opérateur sur  $E$  est diagonalisable si la somme directe de ses sous-espaces vectoriels propres est  $E$ .

Un opérateur diagonalisable est entièrement déterminé par l'ensemble de ses valeurs et vecteurs propres, et il se réduit, sur chaque sous-espace vectoriel propre, à une homothétie. Projection : diagonalisable, valeurs propres 0, 1. Symétrie : diagonalisable, valeurs propres  $\pm 1$ . Un opérateur linéaire bijectif est diagonalisable si et seulement si son inverse est diagonalisable. (Sur chaque sous-espace vectoriel propre, l'inversion d'une homothétie est triviale.)

La diagonalisation est une réduction en homothéties. La réduction d'un opérateur en opérateurs sur des sous-espaces vectoriels stables en somme directe est moins forte que la diagonalisation.

Exercice : suite à (déf. 1.56), avec trois sous-espaces vectoriels, montrer que  $f : X_1 + X_2 + X_3 \mapsto X_1 - X_2 + 2X_3$  est diagonalisable et se réduit en la somme d'une symétrie et d'une homothétie.

### 1.4.6 Application multilinéaire

**Définition 1.58** (application bilinéaire). Soit  $E, E', F$  trois espaces vectoriels. Une application à deux variables  $f \in \mathbf{A}[(E, E'), F]$  est bilinéaire si toutes ses fonctions partielles (déf. 1.12) sont des applications linéaires. Soit  $\mathbf{Li}_2[(E, E'), F]$  l'ensemble des applications bilinéaires de  $(E, E')$  vers  $F$ .

Remarque : il est rigoureusement impossible de généraliser (déf. 1.58) à un nombre inconnu d'ensembles quelconques (Cantor).

**Définition 1.59** (application  $n$ -linéaire). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E, F$  des espaces vectoriels. Une  $n$ -application (déf. 1.22)  $f \in \mathbf{A}[E^{(n)}, F]$  est  $n$ -linéaire si toutes ses fonctions partielles sont des applications linéaires. Soit  $\mathbf{Li}_n[E, F]$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires de  $E$  vers  $F$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Li}_1[E, F] &\leftrightarrow \mathbf{Li}[E, F], \\ \mathbf{Li}_2[E, F] &\leftrightarrow \mathbf{Li}_2[(E, E), F]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Une application  $n$ -linéaire est homogène de degré  $n$ .

**Définition 1.60.** Soit  $E$  un espace vectoriel. La forme quadratique sur  $E$  associée à une forme bilinéaire

$$b \in \mathbf{Li}_2[(E, E), \mathbb{R}], \quad \text{ten}[b] = (b[x, y] \in \mathbb{R}, x, y \in E)$$

est

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto q[x] = b[x, x]. \end{aligned}$$

Une forme quadratique est homogène de degré deux.

**Théorème 1.15.** Toute forme quadratique  $q$  sur un espace vectoriel  $E$  est associée à une unique forme bilinéaire symétrique  $b$  sur  $(E, E)$ .

*Démonstration.*

$$q[x + y] = b[x + y, x + y] = q[x] + q[y] + 2b[x, y], \quad (1.24)$$

$$b[x, y] = \frac{1}{2}(q[x + y] - q[x] - q[y]). \quad (1.25)$$

□

Autrement dit  $b \mapsto q$  (déf. 1.60) est une bijection, de l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $(E, E)$  vers l'ensemble des formes quadratiques sur  $E$ .

**Définition 1.61** (forme polaire). La forme polaire de la forme quadratique  $q$  est la forme bilinéaire symétrique  $b$  (1.25).

## 1.5 Matrice

**Définition 1.62** (matrice). Soit  $E$  un ensemble. Une  $E$ -matrice de dimension  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$  est une application de  $(\{1 \dots n\}, \{1 \dots p\})$  vers  $E$ . Matrice extraite... Une matrice carrée de dimension  $n$  est une matrice de dimension  $(n, n)$ . Soit  $E^{(n,p)}$  l'ensemble des  $E$ -matrices de dimension  $(n, p)$ . L'ensemble des  $E$ -matrices est

$$E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})} = \bigcup_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)} E^{(n,p)}.$$

$E^{(n,p)}$  est un espace vectoriel de dimension  $np$ .

$$E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})} \subset E^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}},$$

mais l'inclusion est stricte. Pourquoi ?

Transposition des  $E$ -matrices  $T$  :

$$E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})} \rightarrow E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})}$$

$$x = (X_{i,j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p) \mapsto T[x] = x^t = (X_{j,i}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p),$$

Fonctions ligne  $L$  et fonction colonne  $C$  :

$$E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})} \rightarrow E^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$$

$$x = (X_{i,j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p) \mapsto L[x] = ((X_{i,j}, j = 1 \dots p), i = 1 \dots n),$$

$$x = (X_{i,j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p) \mapsto C[x] = ((X_{i,j}, i = 1 \dots n), j = 1 \dots p).$$

$L, C$  sont des morphismes d'espace vectoriel.  $T$  est un automorphisme involutif d'espace vectoriel. La transformée de  $L$  par  $T$  est  $C$ , et la transformée de  $C$  par  $T$  est  $L$ .

$$\forall x \in E^{(\mathbb{N}, \mathbb{N})}, L[x^t] = C[x], C[x^t] = L[x].$$

L'espace vectoriel  $E^{(n,p)}$  est isomorphe à  $E^{(p)(n)}$  ou  $E^{(n)(p)}$  via  $L, C$ .

Soit  $(E, +)$  un groupe. Une  $E$ -matrice est (anti)symétrique, en tant qu'application (déf. 1.35), si et seulement si son image en ligne (par  $L$ ) est égale (opposée) à son image en colonne (par  $C$ ) :

$$x = x^t \Leftrightarrow L[x] = C[x],$$

$$x = -x^t \Leftrightarrow L[-x] = -C[x].$$

Soit  $E$  un espace vectoriel. D'après (thé. 1.14), l'espace vectoriel des  $E$ -matrices carrées est la somme directe du sous-espace vectoriel des  $E$ -matrices

symétriques et du sous-espace vectoriel des  $E$ -matrices antisymétriques, autrement dit, toute  $E$ -matrice carrée  $x$  se décompose uniquement en la somme d'une  $E$ -matrice symétrique et d'une antisymétrique :

$$x = \frac{1}{2}(x + x^t) + \frac{1}{2}(x - x^t).$$

Matrice diagonale, diagonale bordée, triangulaire supérieure, inférieure. . .

Notation positionnelle unidimensionnelle puis bidimensionnelle d'une matrice (basée sur la convention d'écriture européenne) :

$$(x_{i,j}, i = 1 \dots 3, j = 1, 2) = ((x_{1,1}, x_{1,2}), (x_{2,1}, x_{2,2}), (x_{3,1}, x_{3,2})) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.63** (produit contracté de matrices réelles). *Soit  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ . Le produit contracté de matrices  $x \in \mathbb{R}^{(n,p)}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{(p,q)}$  est, en sommant sur les indices répétés,*

$$x.y \in \mathbb{R}^{(n,q)}, (x.y)_{i,k} = x_{i,j}y'_{j,k}.$$

Avec (déf. 1.13, déf. 1.63, 1.2),

$$\text{ten}[\delta[n]] = (\delta[i, j], i, j = 1 \dots n),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{(n,p)}, x = x.\delta[p] = \delta[n].x, \quad (1.26)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{(n,n)}, x = x.\delta[n] = \delta[n].x. \quad (1.27)$$

La base canonique de  $\mathbb{R}^{(n)}$  est  $L[\delta[n]] = C[\delta[n]]$ . L'ensemble des matrices réelles carrées de dimension  $n$  est un semigroupe multiplicatif, d'élément neutre  $\delta[n]$ . L'ensemble des matrices réelles inversibles de dimension  $n$  est un groupe multiplicatif.

**Définition 1.64** (matrices réelles équivalentes, semblables). *Deux matrices  $x, x'$  réelles, de dimension  $(n, p)$  sont*

**équivalentes** *si il existe deux matrices réelles  $\phi, \phi'$ , inversibles, respectivement de dimension  $n, p$ ,  $\phi.x = x'.\phi'$ .*

**semblables** *si  $n = p$  et il existe une matrice réelle  $\phi$  inversible de dimension  $n = p$ ,  $\phi.x = x'.\phi$ .*

Justification : ces deux relations sont des relations d'équivalence dans  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N},\mathbb{N})}$ , en particulier, (1.26, 1.27) montrent leur réflexivité. Deux matrices réelles carrées semblables sont équivalentes.

Relation entre la contraction et la transposition des matrices réelles :  $T$  restreint à  $\mathbb{R}^{(n,n)}$  est un antimorphisme pour la loi interne induite par le produit de matrices,

$$\forall n, p, q \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{(n,p)}, \mathbb{R}^{(p,q)}), (x.y)^t = y^t.x^t. \quad (1.28)$$

et, pour  $x \in (\mathbb{R}^{(n,n)})$  inversible,

$$x^{t^{-1}} = x^{-1t}.$$

Deux matrices réelles sont semblables (équivalentes) si et seulement si leur transposées le sont également.

### 1.5.1 Déterminant

**Définition 1.65** (déterminant d'une matrice réelle carrée).

$$\det[(x_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j = 1 \dots n)] = \sum_{\sigma} \epsilon[\sigma] x_{1,\sigma[1]} \dots x_{n,\sigma[n]},$$

où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1 \dots n\}$ , de signature  $\epsilon[\sigma] = \pm 1$ . *Déterminant extrait : celui d'une matrice extraite.*

En particulier,

$$\begin{aligned} \det[(x_{i,j}, i, j = 1 \dots 3)] &= \det \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} \\ &= x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3} + x_{1,2}x_{2,3}x_{3,1} + x_{1,3}x_{2,1}x_{3,2} - x_{3,1}x_{2,2}x_{1,3} - x_{3,2}x_{2,3}x_{1,1} - x_{3,3}x_{2,1}x_{1,2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Attention : (1.29) est parfois décrit par une règle (dite de Sarrus), dont la généralisation en dimension quatre est abusive. C'est un exemple de piège logique, par excès d'intelligence.

Le déterminant, en fonction des lignes ou des colonnes, est une forme  $n$ -linéaire antisymétrique sur  $\mathbb{R}^{(n)}$ .

**Définition 1.66.** *Le (déterminant) mineur de  $x = (X_{i,j}, i, j = 1 \dots n)$  en  $(i, j)$  est (le déterminant extrait)  $\Delta_{i,j}[x] = \det[(X_{k,l}, k \neq i, l \neq j)]$ . La comatrice de  $x$  est  $x^c = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}[x], i, j = 1 \dots n)$ . Un cofacteur est une valeur de la comatrice.*

Relations entre déterminant et transposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{(N,N)}, \det[x^t] = \det[x], x^{ct} = x^{tc}.$$

Pour simplifier, on admet  $x^{ct} = x^{ct} = x^{tc}$ .

Par factorisation dans (déf. 1.65), on obtient le développement d'un déterminant suivant une ligne  $i$  ou une colonne  $j$  :

$$\det[x] = \sum_{j=1..p} X_{i,j}(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}[x] = \sum_{i=1..n} X_{i,j}(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}[x]. \quad (1.30)$$

Ainsi, avec (déf. 1.66), (1.30) devient

$$\det[x] = (x.x^{ct})_{i,i} = (x^{ct}.x)_{j,j}.$$

Or, pour  $i \neq j$ ,

$$(x.x^{ct})_{i,j} = \sum_{k=1..p} X_{i,k}(-1)^{j-1+k-1} \Delta_{j,k}[x]$$

n'est autre que le développement suivant la ligne  $j$  du déterminant, nul par antisymétrie, de la matrice obtenue à partir de  $x$  en recopiant la ligne  $i$  à la place de la ligne  $j$ , et dualement, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{(n,n)}, x.x^{ct} = x^{ct}.x = \det[x]\delta[n], \quad (1.31)$$

donc aucune matrice de déterminant nul n'est inversible et

$$\forall (x \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \det[x] \neq 0), x^{-1} = \det[x]^{-1}x^{ct}. \quad (1.32)$$

## 1.5.2 Matrice et famille de vecteur

**Définition 1.67** (matrice d'une famille finie de vecteur). *Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $e$ ,  $\text{ten}[e] = (e_i, i = 1 \dots n)$ . La matrice dans la base  $e$  d'une famille finie de vecteur  $x$ , réécrite en suite,*

$$\text{ten}[x] = (x_j \in E, j = 1 \dots p), \text{ten}_e[x_j] = (x_{i,j} \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n),$$

est

$$\text{ten}_e[x] = (x_{i,j} \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p).$$

La comatrice de  $x$  dans  $e$  est la comatrice de  $\text{ten}_e[x]$ .

La notation invite à nommer tenseur la matrice d'une famille finie de vecteur.

**Définition 1.68** (matrice de passage). Soit  $E$  un espace vectoriel et  $e, e'$  deux bases de  $E$  de dimension  $n$ . La matrice de passage de  $e$  à  $e'$  est la matrice carrée  $\alpha$  de dimension  $n$  telle que

$$e'_j = e_i \alpha_{i,j}.$$

$$\text{ten}_e[e'] = (\alpha_{i,j}, i, j = 1 \dots n).$$

Changement de base  $e$  pour  $\text{ten}_e[x]$ , où  $x$  est une  $E$ -suite : en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} x_k &= e'_j X'_{j,k} = e_i \alpha_{i,j} X_{j,k} = e_i X_{i,k}, \\ X_{i,k} &= \alpha_{i,j} X'_{j,k}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\forall x \in E^{(p)}, \text{ten}_e[x] = \text{ten}_e[e'] \cdot \text{ten}_{e'}[x]. \tag{1.34}$$

- Les anciennes coordonnées  $\text{ten}_e[x]$  s'expriment directement en fonction des nouvelles  $\text{ten}_{e'}[x]$  et de la matrice de passage  $\text{ten}_e[e']$ .
- La matrice  $\text{ten}_e[e']$  est de dimension  $(n, n)$  et la matrice  $\text{ten}_{e'}[x]$  est de dimension  $(n, p)$ , donc leur produit contracté (déf. 1.63) existe.
- Comme la matrice carrée  $\text{ten}_e[e']$  est inversible, les matrices réelles  $\text{ten}_e[x], \text{ten}_{e'}[x]$  sont semblables (déf. 1.64).
- On reviendra sur le cas  $p = 1$ , en tirant profit de  $E^{(1)} \leftrightarrow E$ .

Comment déterminer le rang (déf. 1.45)  $r$  de  $x \in E^{(p)}$  d'après  $\text{ten}_e[x]$ ? La  $p$ -fonction  $(x_1 \dots x_p) \mapsto r$  est symétrique et invariante par addition à un membre de la famille d'un autre membre de la famille, ou par multiplication par un réel non-nul. Ces propriétés évoquent celles des formes  $p$ -linéaires (anti)symétriques.

**Théorème 1.16.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $p \geq 2$ . L'ensemble des formes  $p$ -linéaires antisymétriques sur  $E$  est un espace vectoriel de dimension un si  $p \leq n$ , zéro sinon.

Donc la dimension de  $E$  est aussi le plus grand entier  $p$  tel qu'il existe au moins une forme  $p$ -linéaire antisymétrique non-nulle sur  $E$  (et si on en tient une, alors les autres sont proportionnelles). On va appliquer cela au sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}.x$ , dont la dimension est le rang  $r$  recherché.

**Définition 1.69.** Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $e$  de dimension finie  $n$ .

$$\forall x \in E^{(n)}, \det_e[x] = \det[\text{ten}_e[x]].$$

Pour toute base  $e$  de  $E$ ,  $\det_e$  est une forme  $n$ -linéaire antisymétrique sur  $E$  de dimension  $n$ , de plus non-nulle, parce que

$$\det_e[e] = \det[\delta[n]] = 1. \quad (1.35)$$

Changement de base  $e$  pour  $\det_e[x]$ , où  $x$  est une famille finie de vecteur, de même dimension que  $e$  : d'après (thé. 1.16, 1.35),

$$\det_{e'} = \det_e[e] \det_e, \quad \det_{e'}[e] \det_e[e'] = 1. \quad (1.36)$$

Donc  $\det_e[e']$  ne s'annule jamais, d'où la propriété fondamentale du déterminant, que, pour toute famille finie  $x$  de  $E$ , de même dimension que  $E$ ,

$$x \text{ base} \Leftrightarrow \exists e \text{ base, } \det_e[x] \neq 0 \Leftrightarrow \forall e \text{ base, } \det_e[x] \neq 0.$$

Idem pour  $x$  de dimension  $p \leq n$ , dans le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}.x$ .

Donc, pour calculer  $r$ , on commence par choisir  $x_{\sigma[1]} \neq 0$  (s'il n'en existe pas, alors  $r = 0$ ). Soit  $q \geq 1$ . Partant d'une sous-famille libre  $y = (x_{\sigma[i]}, i = 1 \dots q)$  de  $x$ , on cherche  $x_{\sigma_{q+1}}$  tel que  $y' = (x_{\sigma[i]}, i = 1 \dots q + 1)$  soit encore libre. En appliquant (thé. 1.12) aux projections canoniques, annulant les lignes de la matrice  $\text{ten}_e[y']$ , on voit que, si toutes les matrices carrées extraites de dimension  $q + 1$  sont de déterminant nul, alors  $x_{\sigma_{q+1}}$  est une combinaison linéaire de  $y$ ,  $y'$  est liée et  $r = q$ . Sinon, on recommence. D'où un algorithme (ou programme) itératif de détermination du rang, dont la terminaison est garantie par (1.19).

On revient à la structure vectorielle duale de  $\mathbb{R}^{(n,p)}$ .

**Définition 1.70.** *Quelle que soit  $x \in \mathbb{R}^{(n,p)}$ , le rang de  $x$  est celui de la famille  $C[x]$  dans  $\mathbb{R}^{(n)}$ .*

**Théorème 1.17.** *Le rang de  $x$  est aussi celui de la famille  $L[x]$  dans  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Une matrice réelle et sa transposée ont le même rang.*

*Démonstration.* Le déterminant (du rang, on l'oublie parfois!) est invariant par transposition.  $\square$

### 1.5.3 Matrice et application linéaire

**Définition 1.71.** *Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Le produit contracté d'une matrice  $x \in \mathbb{R}^{(n,p)}$  et d'une suite  $y \in \mathbb{R}^{(p)}$  est, en sommant sur les indices répétés,*

$$x.y \in \mathbb{R}^{(n)}, \quad (x.y)_i = x_{i,j}y_j.$$

Le produit contracté d'une suite  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$  et d'une matrice  $y \in \mathbb{R}^{(n,p)}$  est, en sommant sur les indices répétés,

$$x.y \in \mathbb{R}^{(n)}, (x.y)_i = x_j y_{j,i}.$$

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{(n,p)}, \forall y \in \mathbb{R}^{(p)}, (x.y)^t = y.x^t. \quad (1.37)$$

La définition 1.71 permet d'écrire deux changements de base.

Changement de base  $e$  pour  $\text{ten}_e[x]$ , où  $x$  est un vecteur (déf. 1.44) : en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} x = e'_j X'_j &= e_i \alpha_{i,j} X'_j = e_i X_i, \\ X_i &= \alpha_{i,j} X'_j, \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\forall x \in E, \text{ten}_e[x] = \text{ten}_{e'}[e'] \cdot \text{ten}_{e'}[x]. \quad (1.39)$$

- Les anciennes coordonnées s'expriment directement en fonction des nouvelles et de  $\text{ten}_e[e']$ .
- À un isomorphisme près, (1.39) n'est que (1.34) avec  $p = 1$ .

Changement de base  $e$  pour  $\text{ten}_e[\mu]$ , où  $\mu$  est une forme linéaire (déf. 1.52) : en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} \text{ten}_e[\mu] &= (\mu[e_i], i = 1 \dots n), \\ \mu[e'_j] &= \mu[e_i \alpha_{i,j}] = \mu[e_i] \alpha_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\forall \mu \in \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}], \text{ten}_{e'}[\mu] = \text{ten}_e[\mu] \cdot \text{ten}_{e'}[e'] \quad (1.41)$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^{(n,p)}$ . Voici une application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(p)} &\rightarrow \mathbb{R}^{(n)} \\ y &\mapsto x.y. \end{aligned} \quad (1.42)$$

S'il est possible, à partir d'une matrice, de construire une application linéaire, l'inverse est également vrai, en dimension finie.

**Définition 1.72** (matrice d'une application linéaire). *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels respectivement de base  $e, f$ .*

- La matrice d'une application linéaire  $x \in \mathbf{Li}[E, F]$  dans les bases  $e, f$  est  $\text{ten}_f[x[e]]$ .
- La matrice d'un opérateur  $x \in \mathbf{Li}[E, E]$  dans la base  $e$  est  $\text{ten}_e[x[e]]$ .

Dans (déf. 1.72), vu que  $e \in E^{(n)}$  alors que  $x$  part de  $E$ ,  $x[e]$  ne peut être définie que par (déf. 1.11). Le rang d'une application linéaire (déf. 1.51) est aussi celui de sa matrice dans des bases quelconques.

D'après (déf. 1.72) :

$$\begin{aligned} \text{ten}_f[(\alpha x + x')[e]] &= \alpha \text{ten}_f[x[e]] + \text{ten}_f[x'[e]], \\ \text{ten}_g[y \circ x[e]] &= \text{ten}_g[y[f]] \cdot \text{ten}_f[x[e]], \\ \text{ten}_e[\text{Id}_E[e]] &= \delta[n], \\ \text{ten}_e[x^{-1 \circ}[e]] &= \text{ten}_e[x[e]]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

d'où divers isomorphismes. En conséquence de (1.43), quelles que soient  $e, e'$  deux bases de  $E$ ,

$$\text{ten}_{e'}[e] = \text{ten}_e[e']^{-1}. \quad (1.44)$$

Quelle est la matrice de (1.42) dans la base canonique ? Et dans une base quelconque ? On rencontre encore un problème de changement de base, qu'il vaut mieux résoudre en général.

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels, respectivement de base  $e, f$ ,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ ,  $\text{ten}[f] = (f_1 \dots f_p)$ . Soit  $x \in \mathbf{Li}[E, F]$ .

Soit  $e'$  une base de  $E$  et  $f'$  une base de  $F$ . Soit  $\alpha$  la matrice de passage (déf. 1.68) de  $e$  à  $e'$  et  $\beta$  la matrice de passage inverse. Soit  $\lambda$  la matrice de passage de  $f$  à  $f'$  et  $\mu$  la matrice de passage inverse.

Changement de bases  $e, f$  pour  $\text{ten}_f[x[e]]$ , où  $x$  est une application linéaire. (1.44) sert la fin, en sommant sur les indices répétés,

$$e'_j = e_i \alpha_{i,j}, \quad f_k = f'_l \mu_{l,k}, \quad (1.45)$$

$$x[e_i] = f_k X_{k,i}, \quad x[e'_j] = f'_l X'_{l,j}. \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} x[e'_j] = x[e_i] \alpha_{i,j} &= f_k X_{k,i} \alpha_{i,j} = f'_l \mu_{l,k} X_{k,i} \alpha_{i,j}, \\ X'_{l,j} &= \mu_{l,k} X_{k,i} \alpha_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{Li}[E, F], \text{ten}_{f'}[x[e']] &= \text{ten}_{f'}[f] \cdot \text{ten}_f[x[e]] \cdot \text{ten}_e[e'] \\ &= \text{ten}_{f'}[f']^{-1} \cdot \text{ten}_f[x[e]] \cdot \text{ten}_e[e']. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Exercice : vérifier la cohérence des dimensions des facteurs dans (1.48).

Formule de changement de base  $e$  pour  $\text{ten}_e[x[e]]$ , où  $x$  est un opérateur

linéaire :

$$e'_j = e_i \alpha_{i,j}, \quad e_k = e'_l \beta_{l,k}, \quad (1.49)$$

$$x[e_i] = e_k X_{k,i}, \quad x[e'_j] = e'_l X'_{l,j}. \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} x[e'_j] = x[e_i] \alpha_{i,j} &= e_k X_{k,i} \alpha_{i,j} = e'_l \beta_{l,k} X_{k,i} \alpha_{i,j}, \\ X'_{l,j} &= \beta_{l,k} X_{k,i} \alpha_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{Li}[E, E], \text{ten}_{e'}[x[e']] &= \text{ten}_{e'}[e] \cdot \text{ten}_e[x[e]] \cdot \text{ten}_e[e'] \\ &= \text{ten}_e[e']^{-1} \cdot \text{ten}_e[x[e]] \cdot \text{ten}_e[e']. \end{aligned} \quad (1.52)$$

**Théorème 1.18.** *Deux matrices réelles sont équivalentes si et seulement si elles sont la matrice d'une même application linéaire dans deux couples de bases. Deux matrices réelles carrées sont semblables si et seulement si elles sont la matrice d'un même opérateur dans deux bases. Deux matrices réelles sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Formules de Cramer pour la résolution d'une équation affine dans  $\mathbb{R}^{(n)}$ ...

#### 1.5.4 Déterminant d'opérateur linéaire

Soit  $\mu$  une forme  $n$ -linéaire antisymétrique sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Pour tout opérateur linéaire  $f$  sur  $E$ ,  $\mu \circ f$  est encore une forme  $n$ -linéaire antisymétrique sur  $E$ , donc (thé. 1.16) proportionnelle à  $\mu$ , avec un coefficient de proportionnalité indépendant de  $\mu$  (vérifier).

**Définition 1.73.** *Le déterminant d'un opérateur linéaire  $f$  sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  est l'unique nombre réel  $\det[f]$  tel que, pour toute forme  $n$ -linéaire antisymétrique  $\mu$  sur  $E$ ,*

$$\mu \circ f = \det[f] \mu.$$

Formellement, on sort  $f$  en le remplaçant par son déterminant.

Soit  $e$  une base de  $E$ ; avec  $\mu = \det_e$ ,  $x = e$ , et (1.35), le déterminant d'un opérateur est aussi celui de sa matrice dans la base  $e$  :

$$\det[f] = \det_e[f[e]]. \quad (1.53)$$

$\det$  est une forme homogène de degré  $n$  sur  $\mathbf{Li}[E, E]$ , et un morphisme du semigroupe  $(\mathbf{Li}[E, E], \circ)$  vers  $\mathbb{R}$ , et du groupe des automorphismes sur l'espace vectoriel  $E$  vers  $\mathbb{R}^*$ .

$$\det[\alpha f] = \alpha^n \det[f], \quad \det[f \circ g] = \det[f] \det[g], \quad \det[\text{Id}_E] = 1. \quad (1.54)$$

Un opérateur linéaire  $f$  est bijectif si et seulement si  $\det[f] \neq 0$ , et alors

$$\det[f^{-1}] = \det[f]^{-1}.$$

En passant aux matrices,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \det[x.y] = \det[x] \det[y], \det[x^{-1}] = \det[x]^{-1}.$$

Suite à (déf. 1.73), si de plus  $f$  est bijective, alors la transformée (déf. 1.28) de  $\mu$  par  $f$  est  $\det[f]^{-1}\mu$  :

$$\begin{aligned} \mu[x] &= \det[f]^{-1} \mu[f[x]], \quad x' = f[x], \quad \mu' = \det[f]^{-1} \mu, \\ \mu[x] &= \mu'[x']. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Toute forme  $n$ -linéaire antisymétrique sur  $E$  de dimension  $n$  est invariante par tout opérateur linéaire  $f$  sur  $E$  de déterminant un.

En combinant (1.36) et (déf. 1.73) :

$$\det_e = \det_e[f[e]] \det_{f[e]} = \det[f] \det_{f[e]}. \quad (1.56)$$

**Théorème 1.19.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $e$  une base de  $E$  et  $x$  une famille finie de dimension  $n$  de  $E$ .  $\det_e[x]$  ne varie pas quand on applique à  $x, e$  un même opérateur linéaire bijectif.*

*Démonstration.* Appliquer (déf. 1.73, 1.56) à la forme  $n$ -linéaire antisymétrique  $\det_e$  :

$$\det_{f[e]}[f[x]] = \det[f] \det_{f[e]}[x] = \det_e[x].$$

□

**Définition 1.74** (polynôme caractéristique). *Le polynôme caractéristique d'un opérateur linéaire  $f$  sur un espace vectoriel  $E$  est*

$$P[x] = \det[f - x \text{Id}_E].$$

Pour toute base  $e$  de  $E$ ,

$$P[x] = \det_e[\text{ten}[f - x \text{Id}_E]] = \det_e[\text{ten}[f] - x\delta[n]].$$

Tous les coefficients de  $P$ , en particulier, au signe près, la trace (à définir...) et le déterminant sont indépendants de  $e$ . On dit qu'ils sont des invariants de  $f$ .

### 1.5.5 Matrice et forme bilinéaire

Soit  $x \in \mathbb{R}^{(n,p)}$ . Voici une forme bilinéaire : en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\mapsto y.x.z = y_i x_{i,j} z_j = y.(x.z). \end{aligned} \quad (1.57)$$

**Définition 1.75** (matrice d'une forme bilinéaire). *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels respectivement de base  $e, f$ ,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ ,  $\text{ten}[f] = (f_1 \dots f_p)$ . La matrice d'une forme bilinéaire  $b \in \mathbf{Li2}[(E, F), \mathbb{R}]$  dans les bases  $e, f$  est*

$$\text{ten}_{e,f}[b] = b[e, f] = (b[e_i, f_j], i = 1 \dots n, j = 1 \dots p).$$

La matrice d'une forme bilinéaire  $b \in \mathbf{Li2}[(E, E), \mathbb{R}]$  dans la base  $e$  est

$$\text{ten}_e[b] = b[e, e] = (b[e_i, e_j], i, j = 1 \dots n).$$

Quelle-est la matrice de (1.57) dans la base canonique ?

La matrice d'une forme bilinéaire symétrique est réelle symétrique.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (E, F), x = X_i e_i, y = Y_j f_j, \forall b \in \mathbf{Li2}[(E, F), \mathbb{R}], \\ b[x, y] = X_i b[e_i, f_j] Y_j = \text{ten}_e[x] \cdot \text{ten}_{e,f}[b] \cdot \text{ten}_f[y]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, x = X_i e_i, y = Y_j e_j, \forall b \in \mathbf{Li2}[(E, E), \mathbb{R}], \\ b[x, y] = X_i b[e_i, e_j] Y_j = \text{ten}_e[x] \cdot \text{ten}_e[b] \cdot \text{ten}_e[y]. \end{aligned}$$

Changement de bases  $e, f$  pour  $\text{ten}_{e,f}[b]$ , où  $b$  est une forme bilinéaire sur  $(E, F)$  :

$$\begin{aligned} b[e_i, f_k] = B_{i,k}, \quad b[e'_j, f'_l] = B'_{j,l}, \\ B'_{j,l} = b[e_i, f_k] \alpha_{i,j} \lambda_{k,l}, \quad B_{i,k} = b[e'_j, f'_l] \beta_{j,i} \mu_{l,k}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\forall b \in \mathbf{Li2}[(E, F), \mathbb{R}], \text{ten}_{e',f'}[b] = \text{ten}_e[e']^t \cdot \text{ten}_{e,f}[b] \cdot \text{ten}_f[f']. \quad (1.59)$$

Changement de base  $e$  pour  $\text{ten}_e[b]$ , où  $b$  est une forme bilinéaire sur  $(E, E)$  :

$$\begin{aligned} b[e_i, e_k] = B_{i,k}, \quad b[e'_j, e'_l] = B'_{j,l}, \\ B'_{j,l} = b[e_i, e_k] \alpha_{i,j} \alpha_{k,l}, \quad B_{i,k} = b[e'_j, e'_l] \beta_{j,i} \beta_{l,k}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\forall b \in \mathbf{Li2}[(E, E), \mathbb{R}], \text{ten}_{e'}[b] = \text{ten}_e[e']^t \cdot \text{ten}_e[b] \cdot \text{ten}_e[e']. \quad (1.61)$$

## 1.6 Espace euclidien

### 1.6.1 Produit scalaire, orthogonalité

**Définition 1.76** (espace vectoriel euclidien). *Un espace vectoriel préhilbertien est un espace vectoriel  $E$ , muni d'une forme quadratique non-dégénérée positive  $q$ . Soit  $h$  la forme polaire (1.61) de  $q$ . Le produit scalaire de  $x, y \in E$ , le carré scalaire de  $x$  et la norme euclidienne de  $x$  sont*

$$\langle x, y \rangle = h[x, y], \quad \|x\| = \sqrt{q[x]}.$$

*Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel préhilbertien de dimension finie. Un espace affine euclidien est un espace affine sur un espace vectoriel euclidien.*

La fonction norme ( $\|\bullet\|$ ) est non-dégénérée (déf. 1.35), non-linéaire, positive (déf. 1.43), positivement homogène de degré un (déf. 1.48) et vérifie l'inégalité triangulaire,

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (1.62)$$

**Définition 1.77** (espace préhilbertien ordonné). *Un espace préhilbertien  $E$ , muni d'une forme quadratique de forme polaire  $h$ , est ordonné si  $E$  est un espace vectoriel ordonné (déf. 1.40), et  $h$  est positive pour l'ordre canonique (1.16) de  $(E, E)$ .*

$h$  étant non-linéaire, sa positivité est au sens de (déf. 1.43), non (déf. 1.53) :

$$\forall x, y \in E^+, \quad \langle x, y \rangle \geq 0.$$

$\mathbb{R}^{(n)}$ , muni de la forme quadratique canonique,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(n)} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x.\delta[n].x = x.x, \end{aligned} \quad (1.63)$$

et de l'ordre canonique (1.16), est un espace vectoriel euclidien ordonné.

Exercice : montrer

$$\forall (x, y \in \mathbb{R}^{(n)}, 0 \leq x \leq y), \quad \|x\| \leq \|y\|. \quad (1.64)$$

(1.64) s'étend-il à un espace préhilbertien ordonné ?

**Théorème 1.20.** (*Schwarz, Buniakovski*)

Vecteurs unitaires, cosinus euclidien, distance euclidienne :

$$\cos[x, y] = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}, \quad (1.65)$$

$$OM = d[O, M] = \|r_M\|. \quad (1.66)$$

La fonction à deux variables cosinus euclidien et la fonction à deux variables distance sont symétriques. La distance entre  $O$  et  $M$  est l'image de  $(O, M)$  par la fonction à deux variables distance.

Orthogonalité, théorème de Pythagore, supplémentaire orthogonal, projection ou symétrie orthogonale. . .

**Définition 1.78.** Une famille finie de  $E$ , réécrite en  $E$ -suite  $(x_i, i = 1 \dots p)$ , est

**orthogonale** si (déf. 1.7)  $H[\langle x_i, x_j \rangle] = \delta[i, j]$ .

**orthonormale** si  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta[i, j]$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, de base orthonormale  $e$ ,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ . Le tenseur d'un vecteur de  $E$ , d'une famille finie de vecteur de  $E$  et d'un opérateur linéaire sur  $E$  s'expriment ainsi : en sommant sur les indices répétés,

$$\forall x \in E, \text{ten}_e[x] = (\langle e_i, x \rangle, i = 1 \dots n), \quad x = e_i \langle e_i, x \rangle, \quad (1.67)$$

$$\forall x \in E^{(p)}, \text{ten}_e[x] = (\langle e_i, x_j \rangle, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p), \quad x_j = e_i \langle e_i, x_j \rangle, \quad (1.68)$$

$$\forall x \in \mathbf{Li}[E, E], \text{ten}_e[x] = (\langle e_i, x[e_j] \rangle, i, j = 1 \dots n). \quad (1.69)$$

Remarque : il manque dans (1.69) une base de  $\mathbf{Li}[E, E]$  sur laquelle décomposer  $x$ , à la manière de (1.67, 1.68) précédemment.

Exercice : étendre (1.69) à une application linéaire d'un espace vectoriel euclidien  $E$  vers un espace vectoriel euclidien  $F$ .

**Théorème 1.21** (orthonormalisation). *Tout espace vectoriel euclidien de dimension finie admet au moins une base orthonormale. Pour toute matrice réelle carrée inversible  $x$ , il existe une unique matrice réelle  $u$ , triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que*

$$x = a.u, \quad a^t = a^{-1}.$$

(Schmidt.)

*Démonstration.* Algorithme orthonormant de Schmidt...  $\square$

**Théorème 1.22** (représentation d'une forme linéaire). *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Si  $x \in E$ , alors  $\langle x, \bullet \rangle$  induit une forme linéaire  $\text{Li}[x]$  sur  $E$ . Inversement,*

$$\forall \mu \in \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}], \exists ! x \in E, \forall y \in E, \mu[y] = \langle x, y \rangle$$

(Riesz).

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}] \\ x &\mapsto \text{Li}[x] \end{aligned}$$

est une bijection. Or,  $\text{Li}$  est une application linéaire. Si  $\text{Li}[x] = 0$ , alors  $\langle x, x \rangle = 0$ ,  $x = 0$ , donc (thé. 1.11)  $\text{Li}$  est injective.

Soit  $\mu \in \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}]$ . Il existe et on choisit une base orthonormale  $e$  de  $E$ . En sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} \forall y \in E, y &= \langle y, e_i \rangle e_i, & \mu[y] &= \langle y, e_i \rangle \mu[e_i], \\ x &= \mu[e_i] e_i, & \langle x, y \rangle &= \langle y, e_i \rangle \mu[e_i] = \mu[y]. \end{aligned}$$

$\mu = \text{Li}[x]$ ,  $\text{Li}$  est surjective.  $\text{Li} : E \rightarrow \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}]$  est un isomorphisme d'espace vectoriel.  $\square$

### 1.6.2 Opérateur linéaire symétrique, torseur

Soit  $f$  un opérateur sur un espace vectoriel euclidien  $E$ . Voici deux formes bilinéaires sur  $(E, E)$  :

$$b_1 = (\langle x, f[y] \rangle, x, y \in E), \quad b_2 = (\langle f[x], y \rangle, x, y \in E). \quad (1.70)$$

Si  $b_1$  est symétrique, alors  $b_1 = b_2$ , et  $b_2$  est symétrique. Si  $b_1$  est antisymétrique, alors  $b_1 = -b_2$ , et  $b_2$  est antisymétrique.

**Définition 1.79** (opérateur (anti)symétrique). *Un opérateur linéaire  $f$  sur un espace vectoriel euclidien  $E$  est (anti)symétrique comme les formes bilinéaires  $b_1, b_2$  (1.70).*

Un opérateur linéaire sur un espace vectoriel euclidien est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base *orthonormale* (1.69) est (anti)symétrique.

L'inverse d'un opérateur linéaire (anti)symétrique (s'il existe) est (anti)symétrique...

Attention : (déf. 1.79) fait hériter  $f$  d'une propriété de  $b_1, b_2$ . Cela est correct, à condition que cette propriété ne concerne pas a priori  $f$ . Cependant, avec  $E = \mathbb{R}^{(2)}$ , l'(anti)symétrie de  $f$  se trouve définie à la fois par (déf. 1.35) et (déf. 1.79). Soit

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, f = (a.x \in \mathbb{R}^{(2)}, x \in \mathbb{R}^{(2)}).$$

$f$  est symétrique au sens de (déf. 1.79) et non-symétrique au sens de (déf. 1.35)! Le fond du problème est simplement qu'un carré possède plus d'un axe de symétrie. D'autre part, ce paradoxe est un exemple de paradoxe dû à concrétisation excessive.

Comme le théorème 1.22 permet de remonter d'une forme linéaire à un vecteur, on veut remonter de même d'une forme bilinéaire symétrique à un opérateur linéaire symétrique.

**Théorème 1.23** (représentation d'une forme bilinéaire). *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. À toute forme bilinéaire symétrique  $b$  sur  $(E, E)$  est associé un unique opérateur linéaire symétrique  $f$  sur  $E$ , tel que*

$$\forall x, y \in E, b[x, y] = \langle x, f[y] \rangle = \langle f[x], y \rangle. \quad (1.71)$$

*Démonstration.* Unicité... Existence. Les fonctions partielles de  $b$  sont des formes linéaires, donc, grâce à (thé. 1.22), pour tous  $x, y \in E$ , il existe et on choisit  $f[x], g[y] \in E$  tels que

$$b[x, \bullet] = \langle f[x], \bullet \rangle, b[\bullet, y] = \langle \bullet, g[y] \rangle.$$

Mais, par symétrie de  $b$ ,  $f = g$ , et, par bilinéarité de  $b$ ,  $f$  est linéaire, donc (1.71) et  $f$  est un opérateur linéaire symétrique (déf. 1.79).  $\square$

D'où des bijections, entre opérateur linéaire symétrique, forme bilinéaire symétrique, forme quadratique,

$$f \leftrightarrow b \leftrightarrow q.$$

Chacun des  $f, b, q$  peut hériter des propriétés des autres qui n'ont pas a priori de sens pour lui. En particulier,  $b, q$  héritent de  $f$  ses valeurs et sous-espaces vectoriels propres, son noyau, son déterminant (déf. 1.73).

$$\det[b] = \det[q] = \det[f].$$

En comparant (déf. 1.75, déf. 1.69), si  $e$  est orthonormale, alors

$$\begin{aligned} \langle e_i, f[e_j] \rangle &= b[e_i, e_j], \\ \det[b] = \det[f] &= \det[\text{ten}_e[f[e]]] = \det[\text{ten}_e[b]], \\ \det[b] &= \det[\text{ten}_e[b]]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Attention : en passant à une base non-orthonormale avec (1.61), la matrice de passage est non-orthogonale, et (1.72) ne tient plus.

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de base  $e$  de dimension  $n$ . Une matrice réelle symétrique  $x$  de dimension  $n$  est la matrice dans  $e$  d'une forme bilinéaire symétrique  $b$  sur  $(E, E)$ . Si, de plus,  $e$  est *orthonormale*, alors  $x$  est aussi la matrice dans  $e$  de l'opérateur linéaire symétrique  $f$  associé à  $b$  (the. 1.23).

**Théorème 1.24.**  $q$  est non-dégénérée si et seulement si  $f$  est bijectif si et seulement si  $\det[f] = \det[q] \neq 0$ .

Attention. L'héritage de la non-dénérescence de  $q$  vers  $f$  ou  $b$  est franchement abusif, parce que cette propriété a un sens a priori (déf. 1.34). Ainsi, une forme bilinéaire symétrique (sur un espace vectoriel non-trivial) est *toujours* dégénérée, même si la forme quadratique associée ne l'est pas.

**Définition 1.80** (torseur). Un torseur sur un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  (déf. 1.50) est un champ affine (déf. 1.55) sur  $\mathcal{E}$ , de partie linéaire antisymétrique (déf. 1.79). Soit  $\mathbf{T}[\mathcal{E}]$  l'ensemble des torseurs sur  $\mathcal{E}$ .

**Définition 1.81.** Un champ  $f : \mathcal{E} \rightarrow E$  est équiprojectif si et seulement si

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \langle f_M, \overrightarrow{MN} \rangle = \langle f_N, \overrightarrow{MN} \rangle.$$

Exercice : le champ de la figure 1.1 est-il équiprojectif ?

**Théorème 1.25.** Soit  $f$  un champ de  $\mathcal{E}$  vers  $E$ .  $f$  est un torseur si et seulement si  $f$  est équiprojectif.

### 1.6.3 Adjoint

**Définition 1.82.** Soit  $f, g$  deux opérateurs linéaires sur un espace vectoriel euclidien  $E$ .  $g$  est adjoint à  $f$  si

$$\forall x, y \in E, \langle x, f[y] \rangle = \langle g[x], y \rangle.$$

**Théorème 1.26.** *Tout opérateur linéaire  $f$  sur un espace vectoriel euclidien possède un unique opérateur linéaire adjoint.*

Soit  $f^\dagger$  l'adjoint de  $f$ . L'adjonction sur  $\mathbf{Li}[E, E]$  est un morphisme involutif d'espace vectoriel, et un antimorphisme de semigroupe et de groupe,

$$f^{\dagger\dagger} = f, (f \circ g)^\dagger = g^\dagger \circ f^\dagger, f^{\dagger^{-1\circ}} = f^{-1\circ\dagger}.$$

Soit  $e$  une base de  $E$ .

$$\forall f \in \mathbf{Li}[E, E], \langle f^\dagger[e_i], e_j \rangle = \langle e_i, f[e_j] \rangle.$$

Si de plus  $e$  est orthonormale (déf. 1.78), alors

$$\forall f \in \mathbf{Li}[E, E], \text{ten}_e[f^\dagger] = \text{ten}_e[f]^t.$$

D'où un isomorphisme  $(\mathbf{Li}[E, E], \bullet^\dagger) \leftrightarrow (\mathbb{R}^{(n,n)}, \bullet^t)$ , reposant sur le choix d'une base orthonormale.

Si un opérateur a une matrice symétrique dans une base  $e$  non-orthonormale d'un espace vectoriel euclidien  $(E, q)$ , alors on peut toujours choisir  $q'$ , tel que  $e$  soit orthonormale dans l'espace vectoriel euclidien  $(E, q')$ . On bénéficie alors des propriétés de la forme bilinéaire symétrique associée.

En passant par les matrices dans une base orthonormale, on montre que déterminant est invariant par adjonction :

$$\forall f \in \mathbf{Li}[E, E], \det[f^\dagger] = \det[f]. \quad (1.73)$$

**Théorème 1.27.** *L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel propre pour un opérateur  $f$  sur un espace vectoriel euclidien  $E$  est stable pour  $f^\dagger$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda, e_\lambda$  une valeur et un vecteur propres pour  $f$ ,  $y$  orthogonal à  $e_\lambda$ . On vérifie que  $f^\dagger[y]$  est encore orthogonal à  $e_\lambda$  :

$$\forall x \in e_\lambda, \langle f^\dagger[y], x \rangle = \langle y, f[x] \rangle = \langle y, \lambda x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = 0.$$

□

Corollaire : l'orthogonal de tout hyperplan stable pour  $f^\dagger$  est une droite propre pour  $f$ .

En passant par les matrices, on montre qu'un opérateur linéaire est diagonalisable si et seulement si son adjoint est diagonalisable.

### 1.6.4 Application orthogonale, isométrie

**Définition 1.83.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Un opérateur  $\phi$  sur  $E$  est une application orthogonale si

$$\forall x, y \in E, \langle \phi[x], \phi[y] \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On montre que  $\phi$  est une application linéaire bijective, et même

$$\phi^{-1} = \phi^\dagger,$$

d'où, par (1.54, 1.73),

$$\det[\phi]^2 = 1, \det[\phi] = \pm 1. \quad (1.74)$$

**Définition 1.84.** Une application orthogonale est positive ou négative comme son déterminant.

Justification : une application orthogonale, étant linéaire et non-nulle, n'a aucune chance d'être positive au sens de (déf. 1.43).

Attention. La définition 1.84 procède par héritage. On en trouve facilement une concrétisation paradoxale. Si  $E$  est ordonné (déf. 1.77), une application orthogonale peut être positive au sens de (déf. 1.53). Par exemple, la symétrie orthogonale par rapport à la diagonale de  $\mathbb{R}^{(2)}$ , transformant  $(x, y) \geq 0$  en  $(y, x) \geq 0$ , est positive au sens de (déf. 1.53), et non-positive au sens de (1.84) !

**Définition 1.85** (isométrie). Application, d'un espace affine  $\mathcal{E}$  vers lui-même, telle que

$$\forall O, M \in \mathcal{E}, d[\phi[O], \phi[M]] = d[O, M].$$

Une isométrie  $\phi$  est une application affine, dont la partie linéaire est une application orthogonale.

**Définition 1.86** (déplacement, retournement). Un déplacement est une isométrie dont la partie linéaire est une application orthogonale positive, un retournement est une isométrie dont la partie linéaire est une application orthogonale négative.

Les applications orthogonales forment un groupe, dit *groupe orthogonal*, dont les applications orthogonales positives forment un sous-groupe, dit groupe spécial-orthogonal. La composée de deux applications orthogonales négatives est positive, l'inverse d'une application orthogonale négative reste négative. Le déterminant, pour les applications orthogonales, joue le rôle de la signature, pour les permutations.

Exercice : quels sont les applications orthogonales symétriques ? antisymétriques ?

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de base  $e$ . Pour toute application orthogonale  $\phi$ , avec (1.56, 1.74),

$$\det_e = \det[\phi] \det_{\phi[e]} . \quad (1.75)$$

Soit  $e, e'$  des bases orthonormales de  $E$  et  $\phi$  l'application linéaire telle que  $e' = \phi[e]$ .  $\phi$  est une application orthogonale et

$$\det_e[e'] = \det_e[\phi[e]] = \det[\phi] = \pm 1.$$

On dit que  $e, e'$  sont de même orientation si  $\det_e[e'] = \det_{e'}[e] = 1$ , et cela définit une relation d'équivalence à deux classes dans l'ensemble des bases orthonormales. On nomme droite une des deux classes ; gauche l'autre, et cela oriente l'espace vectoriel euclidien.

En mécanique, l'orientation peut-être fixée expérimentalement, à l'aide d'un objet *chiral* (règle des trois doigts, filetage...)

**Définition 1.87** (matrice orthogonale). *Une matrice réelle carrée  $a$  de dimension  $n$  est orthogonale comme l'application linéaire  $x \mapsto a.x$  (1.42) sur l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^{(n)}$  muni de la forme quadratique canonique (1.63).*

**Théorème 1.28.**

$$a \text{ orthogonale} \Leftrightarrow a.a^t = a^t.a = \delta[n] \Leftrightarrow a^t = a^{-1}.$$

*Démonstration.* Soit  $a$  une matrice réelle carrée de dimension  $n$ . Grâce à (1.63, 1.42),  $a$  est orthogonale, si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^{(n)}, x.y &= (a.x).(a.y) = (x.a^t).(a.y) = x.(a.a^t).y \\ &= (a.x).(y.a^t) = (y.a^t).(a.x) = y.(a^t.a).x. \end{aligned} \quad (1.76)$$

□

Une matrice réelle carrée est orthogonale si et seulement si elle est la matrice d'une base orthonormale dans une base orthonormale.

Un opérateur linéaire est une application orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Pour inverser une matrice orthogonale, il suffit de la transposer. On reconnaît a posteriori dans (thé. 1.21) une matrice orthogonale.

### 1.6.5 Mesure de parallélépipède

**Définition 1.88.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté et une famille finie  $x$  de  $E$ , de même dimension que  $E$ . Le produit mixte de  $x$  est

$$\det[x] = \det_e[x],$$

où  $e$  est une base orthonormale droite quelconque.

Justification : il existe au moins une base orthonormale droite, et, suite à (1.75), quelles que soient  $e, e'$  deux bases orthonormales de même orientation,  $\det_e = \det_{e'}$ .

On n'a pas besoin d'un nouveau symbole pour le produit mixte, en convenant que l'omission de la base demande le choix d'une base orthonormale droite quelconque. Attention : le produit mixte dépend *globalement* de la famille.

**Définition 1.89** (parallélépipède). Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $(O, e)$  un repère de  $\mathcal{E}$ ,  $\text{ten}[e] = (e_i, i = 1 \dots n)$ . Le parallélépipède  $P[O, e]$  est l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  dont les coordonnées dans le repère  $(O, e)$  sont comprises entre 0 et 1. En sommant sur les indices répétés,

$$P[O, e] = \{M \in \mathcal{E}, r_M = x_i e_i, x_i \in [0, 1]\}.$$

Soit  $\mathbb{P}_n$  l'ensemble des parallélépipèdes de  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Les parallélépipèdes engendrés par les bases de  $\mathbb{R}^{(n)}$  dont chaque vecteur est proportionnel à un vecteur de la base canonique sont les pavés. Pour  $n = 1, 2$ , au lieu de parallélépipède, on dit segment, losange.

**Définition 1.90** (mesure de parallélépipède). La mesure d'un parallélépipède  $P[O, e]$  est la valeur absolue du produit mixte de  $e$ ,  $|\det[e]|$ . Pour  $n = 1, 2, 3$ , au lieu de mesure, on dit longueur, aire, volume.

Justification : au signe près, le produit mixte ne dépend pas du sommet choisit pour origine, ni de l'ordre des séparations formant la base  $e$ .

La mesure d'un parallélépipède orthogonal est le produit des côtés : quelle que soit  $e$  une base orthogonale,

$$|\det[(e_1 \dots e_n)]| = \|e_1\| \dots \|e_n\|.$$

Soit  $f$  une application affine sur  $\mathcal{E}$ . Avec (déf. 1.11),

$$|\det[\text{Li}[f][e]]| = |\det[\text{Li}[f]]| |\det[e]|.$$

Suite à (1.55), la transformée de  $\mu$  par une application affine  $f$  est  $|\det[f]^{-1}| \mu$ .  $\mu$  est donc invariante par isométrie.

### 1.6.6 Produit vectoriel, base duale

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $x_1 \dots x_{n-1} \in E$ . Comme  $\det$  est  $n$ -linéaire sur  $E$ , sa  $n^{\text{e}}$  fonction partielle,

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \det[(x_1 \dots x_{n-1}, y)], \end{aligned}$$

est une forme linéaire, à laquelle s'applique (thé. 1.22) :

$$\exists! z \in E, \forall y \in E, \det[(x_1 \dots x_{n-1}, y)] = \langle z, y \rangle. \quad (1.77)$$

**Définition 1.91** (produit vectoriel). *Le produit vectoriel de  $x_1 \dots x_{n-1}$  est  $z$  (1.77).*

$$\begin{aligned} E^{(n-1)} &\rightarrow E, \\ (x_1 \dots x_{n-1}) &\mapsto z = x_1 \times \dots x_{n-1}. \end{aligned}$$

est une application. Transformée par permutation...

Attention : le produit vectoriel dépend *globalement* de la famille. D'autre part, dans un plan vectoriel  $n = 2$ , le produit vectoriel d'un unique vecteur existe.

$(x_1 \dots x_{n-1})$  est libre si et seulement si  $x_1 \times \dots x_{n-1} \neq 0$ , et alors  $(x_1 \dots x_{n-1}, z)$  est une base, non orthonormale en général, quoique

$$H[\langle x_i, z \rangle] = \delta[i, n]. \quad (1.78)$$

Pour toute application orthogonale  $\phi$  sur  $E$ ,

$$\phi[x_1] \times \dots \phi[x_{n-1}] = \det[\phi] \phi[x_1 \times \dots x_{n-1}].$$

Exercice : vérifier cela pour  $\phi$  homothétie.

Soit  $e$  une base orthonormale droite de  $E$ ,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ , et  $y \in E$ .

$$x_j = e_i X_{i,j}, \quad y = Y_i e_i, \quad z = Z_i e_i.$$

$(Z_i, i = 1 \dots n)$  est la dernière colonne de la comatrice dans  $e$  de la famille  $(x_1 \dots x_{n-1}, y)$  :

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \det_e[(x_1 \dots x_{n-1}, y)], \\ Z_i Y_i &= \sum_{i=1 \dots n} (-1)^{n+i} Y_i \Delta_{i,n}[(x_1 \dots x_{n-1}, y)], \\ Z_i &= (-1)^{n+i} \Delta_{i,n}[(x_1 \dots x_{n-1}, y)], \end{aligned} \quad (1.79)$$

où  $\Delta_{i,n}[(x_1 \dots x_{n-1}, y)]$  ne dépend pas en fait de l'indéterminée  $y$ .

**Théorème 1.29** (complément orthonormal direct). *Dans un espace vectoriel euclidien  $E$  de dimension  $n \geq 2$ , l'unique complément orthonormal direct d'une famille orthonormale droite  $x$  de dimension  $n - 1$  est son produit vectoriel.*

*Démonstration.* Existence : (1.78). Unicité :  $x$  engendre un hyperplan, dont l'orthogonal est une droite, contenant exactement deux vecteurs unitaires. Un seul est le complément orthonormal direct.  $\square$

**Définition 1.92** (base duale). *Soit  $(E, q)$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  et  $e$  une base de  $E$ . Une base duale de  $e$  est une base  $e'$  de  $E$ ,*

$$\forall i, j = 1 \dots n, \quad \langle e_i, e'_j \rangle = \delta[i, j].$$

**Théorème 1.30.** *Il existe une unique base duale.*

*Démonstration.* On cherche la matrice carrée  $\alpha$ , telle que  $e'_j = e_i \alpha_{i,j}$  et

$$\langle e_i, e'_j \rangle = \langle e_i, e_k \rangle \alpha_{k,j} = \delta[i, j]. \quad (1.80)$$

D'après (déf. 1.76),  $q$  est non-dégénérée, donc n'a aucune valeur propre nulle,

$$\det[(\langle e_i, e_j \rangle), i, j = 1 \dots n] \neq 0.$$

Pour chaque  $j = 1 \dots n$ , (1.80) est un système de Cramer sur  $(\alpha_{k,j}, k = 1 \dots n)$ , dont la solution détermine uniquement  $e'_j$ .

Pour  $n \geq 3$ ,

$$e'_1 = \det[e]^{-1} e_2 \times \dots e_n,$$

etc. par permutation circulaire, et pour  $n = 2$ , voir fig. 1.2.  $n = 1 \dots$   $\square$

Une base est orthonormale si et seulement si elle est auto-duale.

FIG. 1.2 – Base duale plane

### 1.6.7 Espace newtonien

**Définition 1.93** (espace vectoriel ou affine newtonien). *Un espace vectoriel ou affine newtonien est un espace vectoriel ou affine euclidien de dimension trois.*

L'existence d'un espace affine newtonien et d'une base orthonormée droite est aussi un fait d'expérience.

Le produit vectoriel induit une loi interne sur  $E$ , non-associative, sans élément neutre :

$$\begin{aligned} (E, E) &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x \times y. \end{aligned}$$

Développement du double produit vectoriel :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z. \quad (1.81)$$

Division vectorielle. Soit  $x, z \in E$ ,  $x \times z \neq 0$ . On cherche  $D = \{y \in E, x \times y = z\}$ . Si  $\langle x, z \rangle \neq 0$ , alors  $D = \emptyset$ . On suppose donc  $\langle x, z \rangle = 0$ . Soit  $y \in D$ .  $\langle y, z \rangle = 0$ ,  $y$  est combinaison linéaire de  $(x, z \times x)$ , base du plan normal à  $z$ . Solution particulière  $y_0$ . . .  $D$  est la droite affine  $y_0 + \mathbb{R}x$ .

Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale droite  $e$  ?

$$x = X_i e_i, \quad y = Y_i e_i, \quad z = Z_i e_i.$$

Comme (1.79) :

$$\begin{aligned} \langle x \times y, z \rangle &= \det_e[(x, y, z)] = \Delta_{1,3} Z_1 - \Delta_{2,3} Z_2 + \Delta_{3,3} Z_3, \\ x \times y &= \Delta_{1,3} e_1 - \Delta_{2,3} e_2 + \Delta_{3,3} e_3, \\ \Delta_{1,3} &= \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{pmatrix} = X_2 Y_3 - X_3 Y_2, \\ \Delta_{2,3} &= \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_3 & Y_3 \end{pmatrix} = X_3 Y_1 - X_1 Y_3, \\ \Delta_{3,3} &= \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{pmatrix} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1. \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon_{i,j,k}$  la signature de la permutation  $(1, 2, 3) \mapsto (i, j, k)$ , ou zéro si  $i, j, k$  ne sont pas distincts. En sommant sur les indices répétés,

$$(x \times y)_i = \epsilon_{i,j,k} X_j Y_k.$$

Soit  $E$  un espace vectoriel newtonien de base  $(e_1, e_2, e_3)$ . La base duale de  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ ,

$$\begin{aligned} e'_1 &= \det[(e_1, e_2, e_3)]^{-1} e_2 \times e_3, \\ e'_2 &= \det[(e_1, e_2, e_3)]^{-1} e_3 \times e_1, \\ e'_3 &= \det[(e_1, e_2, e_3)]^{-1} e_1 \times e_2, \end{aligned}$$

Les applications orthogonales positives sur un espace vectoriel newtonien sont les rotations (une seule droite propre, sauf l'identité). Les applications orthogonales négatives sont les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan, sauf  $-\text{Id}_E$ ).

En prenant des coordonnées dans une base orthonormale,

$$\|x \times y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = 1.$$

Par comparaison avec (1.65),

$$|\sin[x, y]| = \frac{\|x \times y\|}{\|x\| \|y\|}.$$

Le volume (déf. 1.90) d'un parallélépipède  $P[O, (x, y, z)]$  est l'aire d'un losange de base  $\|x \times y\|$ , multipliée par la hauteur opposée :

$$|\det[(x, y, z)]| = |\langle x \times y, z \rangle| = \|x \times y\| (\|z\| \cos[x \times y, z]).$$

L'aire d'un losange  $P[O, (x, y)]$  est la longueur d'un segment de base  $\|x\|$ , multipliée par la hauteur opposée :

$$\|x \times y\| = \|x\| \|y\| |\sin[x, y]|.$$

**Théorème 1.31.** *Pour tout opérateur linéaire antisymétrique  $f$  sur un espace vectoriel newtonien  $E$ , il existe un unique  $\omega \in E$  tel que*

$$\forall x \in E, f[x] = \omega \times x.$$

*Démonstration.*  $\omega \mapsto \omega \times \bullet$  induit un isomorphisme d'espace vectoriel, de  $E$  vers l'espace vectoriel des opérateurs antisymétriques de  $E$ . Ces deux espaces vectoriels sont de dimension trois.  $\square$

**Définition 1.94** (résultante d'un opérateur antisymétrique). *Suite à (thé. 1.31), la résultante de  $f$  est  $\omega$ . La résultante d'un torseur est celle de sa partie linéaire.*

**Théorème 1.32.** *Changement d'origine pour un torseur  $v \in \mathbf{T}[\mathcal{E}]$  (déf. 1.80) de résultante  $\omega \in E$  :*

$$\forall O, M \in \mathcal{E}, v_M = v_O + \omega \times r_M$$

(Varignon).

**Théorème 1.33** (réduction d'un torseur). *Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine newtonien, sur un espace vectoriel  $E$ . Voici un isomorphisme d'espace vectoriel (déf. 1.47) :*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\mathcal{E}] &\rightarrow (E, E) \\ v &\mapsto (\omega, v_O). \end{aligned}$$

$\mathbf{T}[\mathcal{E}]$ , comme  $(E, E)$ , est de dimension six.

**Théorème 1.34.** *Soit  $v_1, v_2 \in \mathbf{T}[\mathcal{E}]$ , de résultantes  $\omega_1, \omega_2$ . Le champ réel*

$$M \mapsto \langle \omega_1, v_{2,M} \rangle + \langle \omega_2, v_{1,M} \rangle.$$

*est uniforme...*

**Définition 1.95** (comoment, hélicité). *... et sa valeur est le comoment de  $v_1, v_2$ . L'hélicité d'un torseur est son demi-comoment avec lui-même.*

Exercice : construire à l'aide de l'hélicité une forme quadratique sur  $\mathbf{T}[\mathcal{E}]$ . Est-elle non-dégénérée, positive ?

## 1.7 Diagonalisation

### 1.7.1 Matrice carrée

Espace vectoriel complexe, plongement de  $\mathbb{R}^{(n)}$  dans  $\mathbb{C}^{(n)}$ ...

**Définition 1.96** (matrice diagonalisable). *Une matrice réelle carrée  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  comme l'opérateur*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(n)} &\rightarrow \mathbb{R}^{(n)} \\ x &\mapsto u.x \end{aligned}$$

(déf. 1.57).

**Théorème 1.35.** *Une matrice réelle carrée  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si il existe une matrice complexe inversible  $a$  (de même dimension que  $u$ ), telle que  $a^{-1} \cdot u \cdot a$  soit diagonale.*

Soit  $u$  une matrice réelle carrée de dimension  $n$ ,  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $s \in \mathbb{C}^{(n)}$  et  $P$  le polynôme caractéristique de  $u$  (1.74),

$$P[x] = \det[u - x\delta[n]].$$

D'après le théorème de d'Alembert,  $P$  est factorisable sur  $\mathbb{C}$ , et, comme  $u$  est réelle, ses racines sont réelles ou complexes conjuguées.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\exists s \in \mathbb{C}^{(n)} \neq 0$ ,  $u \cdot s = \sigma s$ ,
- $a[\sigma] = u - \sigma\delta[n]$  est de rang  $r$  non maximal ( $r < n$ ),
- $P[\sigma] = 0$  (équation aux valeurs propres).

Soit  $\sigma$  une racine de  $P$ , de multiplicité algébrique  $m$ .  $\sigma$  est une valeur propre pour  $u$ . La *multiplicité géométrique* de  $\sigma$  est la dimension du sous-espace vectoriel propre  $E_\sigma$ , aussi égale à  $n - r$ . On montre (et ce n'est pas évident)

$$1 \leq n - r \leq m \leq n.$$

**Théorème 1.36.**  *$u$  est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de chaque valeur propre pour  $u$  atteint sa multiplicité algébrique.*

Équation (aux vecteurs propres) de  $E_\sigma$  : en sommant sur les indices répétés,

$$\text{ten}[a] = (a_{i,j}, i, j = 1 \dots n), \text{ten}[s] = (s_i, i = 1 \dots n), P[\sigma] = 0, a_{i,j}[\sigma]s_j = 0. \quad (1.82)$$

Si  $\sigma$  est une valeur propre simple, alors  $n - r = m = 1$ ,  $E_\sigma$  est une droite, et (1.82) est de rang  $n - 1$ . Si toutes les valeurs propres sont simples, alors  $u$  est diagonalisable. Une valeur propre double (de multiplicité algébrique deux) peut donner un plan propre ou une droite propre, mais dans le dernier cas,  $u$  n'est pas diagonalisable.

Il existe et on extrait de (1.82) un mineur non-nul de rang maximal  $r$ , puis on utilise les  $n - r$  inconnues hors de ce mineur comme paramètres d'un système affine de  $r$  équations à  $r$  inconnues, résolu par les formules de Cramer, d'où des vecteurs propres réels si  $\sigma$  est réelle, ainsi qu'une représentation paramétrique et une base de  $E_\sigma$ .

Si  $\sigma$  est une valeur propre simple, alors (1.82) est de rang  $n - 1$  et une seule solution  $s \neq 0$  suffit à déterminer la droite propre. On peut la trouver plus simplement que par la méthode générale exposée au paragraphe précédent : d'après (1.31),

$$a \cdot a^{ct}[\sigma] = 0,$$

donc chaque *ligne* de  $a^c[\sigma]$  appartient à la droite propre  $E_\sigma$ , et une non-nulle est un vecteur propre.

### 1.7.2 Matrices réelles symétriques

**Théorème 1.37.** *Tout opérateur linéaire symétrique sur un espace vectoriel euclidien est diagonalisable, et ses sous-espaces vectoriels propres sont orthogonaux deux-à-deux.*

*Démonstration.* [18, t. 1, thé. XIII.6.1, p. 408], par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel, utilise le complément orthogonal, et (thé. 1.27).  $\square$

Version matricielle de (thé. 1.37) : toute matrice réelle symétrique  $x$  est diagonalisable, et il existe une matrice orthogonale  $a$  (déf. 1.87) et une matrice réelle diagonale  $\Delta$ ,

$$a^{-1}.x.a = \Delta.$$

Corollaires de (thé. 1.37) :

- Une forme quadratique est non-dégénérée positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
- Soit  $q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel euclidien  $E$ . Dans au moins une base  $e$  orthonormale de  $E$  (1.59),  $q[x]$  s'exprime par une combinaison linéaire du carré des coordonnées de  $x$  dans  $e$ , avec des coefficients qui sont les valeurs propres de  $q$ .

**Théorème 1.38.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $q_1, q_2$  deux formes quadratiques sur  $E$ , avec  $q_1$  non-dégénérée positive. Il existe une base de  $E$  orthonormale pour  $q_1$  et orthogonale pour  $q_2$ .*

*Démonstration.*  $(E, q_1)$  est un espace vectoriel euclidien, auquel on applique (thé. 1.37).  $\square$

Version matricielle de (thé. 1.38) : quelles que soient  $m, k$  deux matrices carrées de dimension  $n$  réelles symétriques, telles que la forme quadratique  $x \mapsto x.m.x$  soit non-dégénérée positive, il existe une matrice carrée réelle  $a$  et une matrice diagonale réelle  $\Delta$ ,

$$a^t.m.a = \delta[n], \quad a^t.k.a = \Delta. \tag{1.83}$$

Attention : (1.83) permet de réduire dans une même base les formes quadratiques  $x \mapsto x.m.x, x.k.x$  à une combinaison linéaire des carrés des coordonnées, mais non de diagonaliser les matrices  $m, k$  (déf. 1.96), à moins que  $a$  soit orthogonale ( $a^t = a^{-1}$ ).

**Définition 1.97.** Soit  $q_1, q_2$  deux formes quadratiques sur  $E$ , avec  $q_2$  non-dégénérée et  $f_1, f_2$  les opérateurs linéaires associés (thé. 1.23). L'opérateur associé à  $(q_1, q_2)$  est

$$f = f_2^{-1} \circ f_1.$$

Le polynôme aux invariants de  $(q_1, q_2)$  est le polynôme caractéristique de  $f$ .

Justification : si  $q_2$  est non-dégénérée, alors  $f_2$  est inversible (thé. 1.24).

**Théorème 1.39.** Il existe une base de  $E$  orthonormale pour  $b_1$  et orthogonale pour  $b_2$  si et seulement si  $f$  est diagonalisable.

**Théorème 1.40.** Quelles que soient  $m, k$  deux matrices carrées réelles de dimension  $n$ , réelles symétriques, avec  $q_1 : x \mapsto x.m.x$  non-dégénérée positive, la matrice  $m^{-1}.k$  est diagonalisable.

*Démonstration.* Théorème 1.38, avec  $q_1$  comme indiqué et  $q_2 : x \mapsto x.k.x$ , puis théorème 1.39 dans le sens direct.  $\square$

Voici un cas simple. Soit  $m, k$  deux matrices réelles symétriques commutant,

$$(m.k)^t = k.m = m.k.$$

$m.k$  reste symétrique, donc elle est diagonalisable (et même dans une base orthonormale, ce qui n'est généralement pas le cas pour (thé. 1.40)). Idem, si  $m$  inversible, pour  $m^{-1}.k$ .

## 1.8 Tenseur

### 1.8.1 Produit tensoriel

#### Produit tensoriel de fonctions

**Définition 1.98** (produit tensoriel de fonctions). Soit  $E, F$  deux ensembles et  $(f, g) \in (\mathbf{F}[E, \mathbb{R}], \mathbf{F}[F, \mathbb{R}])$ . Le produit tensoriel de  $f, g$  est

$$\begin{aligned} f \otimes g &= (E, F) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f[x]g[y]. \end{aligned}$$

$$f \otimes g \in \mathbf{F}[(E, F), \mathbb{R}]. \quad (1.84)$$

Avec  $E = \{1 \dots n\}$ ,  $F = \{1 \dots p\}$  : le produit tensoriel de suites réelles respectivement de dimension  $n, p$  est une matrice réelle de dimension  $(n, p)$  :

$$(x_i, i = 1 \dots n) \otimes (y_j, j = 1 \dots p) = (x_i y_j, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p). \quad (1.85)$$

$$(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2, y_3) = ((x_1 y_1, x_1 y_2, x_1 y_3), (x_2 y_1, x_2 y_2, x_2 y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels. Le produit tensoriel d'une forme linéaire sur  $E$  et d'une forme linéaire sur  $F$  est une forme bilinéaire sur  $(E, F)$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , le produit tensoriel de  $n$  formes linéaires sur  $E$  est une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . Exemple : voici une forme 3-linéaire, produit tensoriel de trois formes linéaires, et invariante par rotation d'un tiers de cercle autour de la grande diagonale de  $\mathbb{R}^{(3)}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(3)} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y)(y + z)(z + x). \end{aligned}$$

### Produit tensoriel d'ensembles de fonctions

**Définition 1.99.** Soit  $E, F$  deux ensembles. On pose

$$\mathbf{F}[E, \mathbb{R}] \otimes \mathbf{F}[F, \mathbb{R}] = \mathbf{F}[(E, F), \mathbb{R}].$$

Ainsi, après (1.84),

$$f \otimes g \in \mathbf{F}[E, \mathbb{R}] \otimes \mathbf{F}[F, \mathbb{R}]. \quad (1.86)$$

Pour les suites réelles,

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^{(n)} \otimes \mathbb{R}^{(p)} = \mathbb{R}^{(n,p)}.$$

La définition 1.99 induit une puissance tensorielle,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{F}[E, \mathbb{R}]^{n \otimes} = \mathbf{F}[E^{(n)}, \mathbb{R}].$$

Dans le cas des suites réelles,

$$\begin{aligned} \forall n, p \geq 1, \mathbb{R}^{(n)} \otimes \mathbb{R}^{(p)} &= \mathbb{R}^{(n,p)}, \\ \mathbb{R}^{(n)p \otimes} &= \mathbb{R}^{(n_1 \dots n_p)}, \quad \forall j = 1 \dots p, n_j = n. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{(n)} \otimes \mathbb{R}^{(p)}$  est un espace vectoriel de dimension  $np$ .  $\mathbb{R}^{(n)p \otimes}$  est un espace vectoriel de dimension  $n^p$ .

$$\mathbf{Li}[E, \mathbb{R}] \otimes \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}] \subset \mathbf{Li}_2[E, \mathbb{R}], \quad (1.87)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{Li}[E, \mathbb{R}]^{n \otimes} \subset \mathbf{Li}_n[E, \mathbb{R}]. \quad (1.88)$$

Inversement, peut-on factoriser une forme  $p$ -linéaire en  $p$  formes linéaires ?  
Exemple : voici deux formes bilinéaires, la première factorisable, la seconde non :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 = (x - y)(x + y), \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2. \end{aligned}$$

### Relation entre somme directe et produit tensoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $e_1, e_2$  deux sous-espaces vectoriels,  $E = e_1 \oplus e_2$ . Bien évidemment,  $E \neq (e_1, e_2)$ . Cependant,

$$\forall (x_1, x_2) \in (e_1, e_2), (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2), \quad (1.89)$$

$$(e_1, e_2) = (e_1, \{0\}) \oplus (\{0\}, e_2). \quad (1.90)$$

Par exemple,

$$\mathbb{R}^{(2)} = (\mathbb{R}, \{0\}) \oplus (\{0\}, \mathbb{R}).$$

Soit  $E, E'$  deux ensembles et  $F$  un espace vectoriel. L'espace vectoriel  $\mathbf{A}[(E, E'), F]$  serait-il, à l'instar de (1.90), une somme directe de sous-espaces vectoriels ne dépendant que de  $E, E'$  ? Autrement dit, peut-on décomposer

$$f \in \mathbf{A}[(E, E'), F], f[x, x'] = f'[x] + f''[x']? \quad (1.91)$$

Soit  $E, E'$  deux groupes additifs. (1.91) détermine uniquement  $f', f''$  :

$$\forall x \in E, f'[x] = f[x, 0] - f''[0].$$

Soit  $\mathbf{Ad}[(E, E'), F]$  l'ensemble des applications additives de  $(E, E')$  vers  $F$ . C'est un espace vectoriel.  $(E, E')$  est encore un groupe additif (canonique).

$$\forall f \in \mathbf{Ad}[(E, E'), F], \forall (x, x') \in (E, E'), f[x, x'] = f[x, 0] + f[0, x'], \quad (1.92)$$

$$\mathbf{A}[(E, \{0\}), F] \oplus \mathbf{A}[\{0\}, E'), F] = \mathbf{Ad}[(E, E'), F] \subset \mathbf{A}[(E, E'), F] \quad (1.93)$$

Les fonctions décomposables suivant (1.91) sont les fonctions additives.

Soit  $E, F$  deux groupes additifs. On reprend (1.93) en tenant compte de (déf. 1.99) :

$$\mathbf{A}[(E, \{0\}), \mathbb{R}] \oplus \mathbf{A}[\{0\}, F), \mathbb{R}] \subset \mathbf{A}[E, \mathbb{R}] \otimes \mathbf{A}[F, \mathbb{R}]. \quad (1.94)$$

Si  $E = F = \mathbb{R}$ , alors l'inclusion (1.94) est stricte. En effet, (1.91) pour le produit tensoriel  $(x, y) \mapsto xy$  aboutit à une équation fonctionnelle impossible,

$$\exists f \in \mathbf{A}[\mathbb{R}, \mathbb{R}], \forall x, y \in \mathbb{R}, xy = f[x] + f[y]. \quad (1.95)$$

Soit  $n, p \geq 1$ . Comme (1.90),

$$(\mathbb{R}^{(n)}, \{0\}) \oplus (\{0\}, \mathbb{R}^{(p)}) = (\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)}).$$

L'équation sur  $(n, p)$

$$(\mathbb{R}^{(n)}, \{0\}) \oplus (\{0\}, \mathbb{R}^{(p)}) \subset \mathbb{R}^{(n)} \otimes \mathbb{R}^{(p)}, \quad (1.96)$$

admet pour solution unique  $(n, p) = (2, 2)$  (comme l'équation diophantienne  $np = n + p$ , également apparentée à (1.95)).

En conclusion, grossièrement, la somme directe est une partie du produit tensoriel, (1.96) étant le seul cas d'identité (dû à  $2 + 2 = 2 \cdot 2$ ).

### Produit tensoriel de vecteurs euclidiens

Voici avec (thé. 1.22) un produit tensoriel de formes linéaires sur des espaces vectoriels euclidiens  $E, F$  :

$$\forall x, u \in E, \forall y, v \in F, (\text{Li}[x] \otimes \text{Li}[y])[u, v] = \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle = \langle u, x \rangle \langle y, v \rangle.$$

**Définition 1.100** (produit tensoriel de vecteurs). *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels euclidiens et  $(x, y) \in (E, F)$ . Le produit tensoriel de  $x, y$  est l'application linéaire  $x \otimes y$  de  $F$  vers  $E$ ,*

$$\forall (u, v) \in (E, F), \langle u, x \rangle \langle y, v \rangle = \langle u, x \otimes y[v] \rangle.$$

Remarque : la réutilisation de  $\otimes$  pour le produit tensoriel de vecteurs est une astuce élégante, mais elle interdit désormais l'usage sans ordre de  $\otimes$ .

Exercice : soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Montrer

$$\forall x, y \in E, (x \otimes y)^\dagger = y \otimes x \in \mathbf{Li}[E, F].$$

En induire un anti-morphisme.

Il faut maintenant admettre que tout ce qu'on a établi à l'aide de bases réécrites en suites par commodité s'applique également lorsque les bases sont paramétrées par un ensemble fini quelconque, telle une partie de  $\mathbb{N}^{(2)}$ .

Version matricielle de (déf. 1.100) : soit  $e, f$  des bases orthonormales de  $E, F$  respectivement. On retrouve un produit tensoriel de suites réelles (déf. 1.85). En sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} x &= X_i e_i, \quad y = Y_j f_j, \quad u = U_i e_i, \quad v = V_j f_j, \\ \text{ten}[X] &= (X_i, i = 1 \dots n) \dots \\ &(U.X)(Y.V) = U.(X \otimes Y).V, \\ \text{ten}_e[x \otimes y[f]] &= X_i Y_j = (X \otimes Y)_{i,j}, \\ \forall (x, y) \in (E, F), \text{ten}_e[x \otimes y[f]] &= \text{ten}_e[x] \otimes \text{ten}_f[y]. \end{aligned}$$

**Théorème 1.41.** *Soit  $E, F$  des espaces vectoriels euclidiens respectivement de dimension  $n, p$  et de base  $e, f$ . Une base de  $\mathbf{Li}[E, F]$  est*

$$\text{ten}[f \otimes e] = (f_j \otimes e_i, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p). \quad (1.97)$$

ten dans (1.97) protège  $\otimes$  contre une interprétation auto-référente. Pour la première fois, on se sert d'une base (1.97) qui n'est pas une suite (mais une famille paramétrée par une partie de  $\mathbb{N}^{(2)}$ ).

D'après (déf. 1.72, 1.48, déf. 1.100), en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{Li}[E, F], x[e_i] &= f_j X_{j,i}, \quad \text{ten}_e[x[f]] = (X_{j,i}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p), \\ \forall (u, v) \in (E, F), \langle v, f_j \otimes e_i[u] \rangle &= \langle v, f_j \rangle \langle e_i, u \rangle. \end{aligned}$$

Si  $e, f$  sont orthonormales, alors, en complément de (1.69), on décompose  $x \in \mathbf{Li}[E, F]$  dans la base  $\text{ten}[f \otimes e]$  :

$$X_{j,i} = \langle f_j, x[e_i] \rangle, \quad u = \langle u, e_i \rangle e_i, \quad v = \langle v, f_j \rangle f_j, \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in (E, F), \langle v, x[u] \rangle &= \langle v, f_j \rangle \langle f_j, x[e_i] \rangle \langle e_i, u \rangle \\ &= \langle v, f_j \rangle X_{j,i} \langle e_i, u \rangle \\ \langle v, x[u] \rangle &= \langle v, X_{j,i} (f_j \otimes e_i)[u] \rangle \\ \forall x \in \mathbf{Li}[E, F], x &= \langle f_j, x[e_i] \rangle f_j \otimes e_i. \end{aligned}$$

En confrontant (1.99) avec (déf. 1.44), et en étendant (déf. 1.44) évidemment à une base paramétrée par un ensemble fini quelconque (non nécessairement séquentiel),

$$\text{ten}[x[e]] = \text{ten}_{f \otimes e}[x]. \quad (1.99)$$

$$\mathbf{Li}[E, F] = \mathbb{R}. \text{ten}[f \otimes e].$$

### 1.8.2 Tenseur

**Définition 1.101** (tenseur). Soit  $E$  un ensemble. Un  $E$ -tenseur d'ordre 0 est un élément de  $E$ . Un  $E$ -tenseur d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n) \in \mathbb{N}^{*(n)}$  est une famille

$$(x_{i_1 \dots i_n} \in E, i_1 = 1 \dots p_1 \dots i_n = 1 \dots p_n).$$

Tenseur extrait... Tenseur hyper-cubique de dimension  $p : \forall i = 1 \dots n, p_i = p$ . Un tenseur carré ou cubique est un tenseur d'ordre deux ou trois hyper-cubique. Soit  $E^{(p_1 \dots p_n)}$  l'ensemble des  $E$ -tenseurs d'ordre  $n$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n)$  de  $E$ . L'ensemble des  $E$ -tenseurs d'ordre  $n$  de  $E$  est

$$E^{(\mathbb{N}^{(n)})} = \bigcup_{(p_1 \dots p_n) \in \mathbb{N}^{*(n)}} E^{(p_1 \dots p_n)}.$$

L'ensemble des  $E$ -tenseurs est

$$E^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E^{(\mathbb{N}^{(n)})}.$$

Un  $E$ -tenseur d'ordre un est une  $E$ -suite, un  $E$ -tenseur d'ordre deux est une  $E$ -matrice.

Remarque : la définition 1.101 « conceptualise » le symbole  $\text{ten}$  (1.2). Ce cas où le symbole précède le concept oblige à renoncer à l'idée naïve, selon laquelle le symbolisme serait secondaire, voire facultatif.

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $q$ , alors  $E^{(p_1 \dots p_n)}$  est un espace vectoriel de dimension  $p_1 \dots p_n q$ . Si  $E = \mathbb{R}$ , alors  $q = 1$ .

**Définition 1.102** (produit tensoriel de tenseurs). Soit  $E, E', F$  trois espaces vectoriels et une application bilinéaire  $b \in \mathbf{Li2}[(E, E'), F]$ . Soit  $x, x'$  deux tenseurs de  $E, E'$ , respectivement d'ordre  $n, n'$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n), (p'_1 \dots p'_{n'})$ . Le  $b$ -produit tensoriel de  $x, x'$  est  $x \otimes x'$ ,

$$\begin{aligned} \forall (i_1 = 1 \dots p_1) \dots (i_n = 1 \dots p_n), (i'_1 = 1 \dots p'_1) \dots (i'_{n'} = 1 \dots p'_{n'}), \\ (x \otimes x')_{i_1 \dots i_n, i'_1 \dots i'_{n'}} = b[x_{i_1 \dots i_n}, x'_{i'_1 \dots i'_{n'}}]. \end{aligned}$$

Le plus souvent, (déf. 1.102) sert avec  $E = E' = F = \mathbb{R}$ , et  $b$  est alors la multiplication des réels. Cependant, on a déjà besoin de (déf. 1.102) avec  $b[x, x'] = x \otimes x'$  pour (1.97).

Un produit tensoriel de tenseurs respectivement d'ordre  $n, n' \geq 1$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n), (p'_1 \dots p'_{n'})$  est un tenseur d'ordre  $n + n'$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n, p'_1 \dots p'_{n'})$  (en multipliant tensoriellement, on concatène les dimensions multi-entières). (Un produit tensoriel dont un des facteurs est un tenseur d'ordre zéro est produit de  $b$ , qui a le même ordre et la même dimension que l'autre facteur.)

**Définition 1.103** (produit contracté de tenseurs). *En sommant sur les indices répétés,*

$$\forall n, n' \geq 2, \forall (i_1 = 1 \dots p_1) \dots (i_{n-1} = 1 \dots p_{n-1}), (i'_2 = 1 \dots p'_2) \dots (i'_{n'} = 1 \dots p'_{n'}), \\ (x \cdot x')_{i_1 \dots i_{n-1}, i'_2 \dots i'_{n'}} = x_{i_1 \dots i_{n-1}, j} x'_{j, i'_2 \dots i'_{n'}}.$$

Pour  $n = 1$  ou  $n' = 1$ , (1.63, 1.42).

Un produit contracté de tenseurs respectivement d'ordre  $n, n' \geq 1$  et de dimension  $(p_1 \dots p_n), (p'_1 \dots p'_{n'})$  est un tenseur d'ordre  $n + n' - 2$  et de dimension  $(p_1 \dots p_{n-1}, p'_2 \dots p'_{n'})$ .

**Définition 1.104** (tenseur d'une application  $p$ -linéaire). *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels, et  $e$  une base de  $E$ ,  $\text{ten}[e] = (e_1 \dots e_n)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbf{Li}_p[E, F]$ . Le tenseur de  $x$  dans la base  $e$  est*

$$\text{ten}_e[x] = (x[(e_{i_1} \dots e_{i_p}]], i_1 \dots i_p = 1 \dots n).$$

Le tenseur de  $x$  est d'ordre  $p$  hyper-cubique de dimension  $n$ . Pour  $F = \mathbb{R}$ , on retrouve, pour  $p = 1$ , un tenseur de forme linéaire sur  $E$ , pour  $p = 2$ , une matrice de forme bilinéaire sur  $(E, E)$ .

Changement de base pour  $\text{ten}_e[x]$ , ou  $x$  est une application  $p$ -linéaire : en sommant sur les indices répétés,

$$x[(e'_{j_1} \dots e'_{j_p}]] = x[(e_{i_1} \dots e_{i_p}]] \alpha_{i_1, j_1} \dots \alpha_{i_p, j_p}. \quad (1.100)$$

### 1.8.3 Changement de base tensoriel

On peut s'étonner de l'absence de formule de changement de base dans (déf. 1.101). C'est en fait lorsque (déf. 1.101) est utilisée, concrètement, pour représenter un vecteur (déf. 1.44), une famille finie de vecteur (déf. 1.67), une forme linéaire (déf. 1.52), une application linéaire ou un opérateur (déf. 1.72), une forme bilinéaire (déf. 1.75) ou une application  $p$ -linéaire (déf. 1.104)

qu'apparaît naturellement une formule de changement de base, telles (1.33, 1.33).

On ne sait pas associer à (déf. 1.101) une formule de changement de base générale. Mais on le fait cas par cas.

Parmi les formules de changement de base, on distingue (1.33, 1.38, 1.40, 1.47, 1.51, 1.58, 1.60, 1.100), qui sont en style indiciel, et (1.34, 1.39, 1.41, 1.48, 1.52, 1.59, 1.61), qui sont en style tensoriel. (On ne sait pas définir un style, mais il suffit d'écrire la liste de ses représentants.) Le style tensoriel est voisin du style matriciel d'exposés plus élémentaires, hormis certaines délicatesses sur les matrices-lignes et les matrices-colonnes.

En même temps qu'on écrit une formule de changement de base, la nécessité d'employer le symbole tensoriel  $\text{ten}$  disparaît. Les formules de changement de base en style tensoriel sont compactes, mais dispensables ; heureusement, car 1.100 n'a pas de pendant tensoriel. Cette impossibilité justifie la floraison d'indice, dès que les tenseurs sont d'ordre supérieur à trois, en mécanique des milieux continus ou en mécanique relativiste [7].

En style indiciel, dans un changement de base, les fonctions partielles d'un tenseur sont

- invariantes, comme l'indice d'une famille de vecteur ( $E$ -tenseur d'ordre un),
- ou bien varient comme l'indice de la base ( $E$ -tenseur d'ordre un),
- ou bien varient à l'inverse de l'indice de la base.

Selon le cas, on dit, d'après (1.30), que l'indice est invariant, covariant ou contravariant.

Soit  $x$  un tenseur réel d'ordre  $n$ . Dans  $x_{i_1 \dots i_n}$ , si l'indice  $i_k$  est covariant, alors on le récrit parfois en haut. Cette notation possède plusieurs défauts :

- Elle entre en conflit avec l'exponentiation.
- Elle ne permet pas de distinguer un indice invariant d'un indice contravariant.
- Elle conduit à modifier l'ordre des indices (ou à des acrobaties typographiques). Cela pose problème dans le cas d'un *tenseur d'ordre deux non-symétrique*, comme celui d'un opérateur ou d'une forme bilinéaire non-symétrique.

Le dernier point revient à travailler sans le dire avec des classes d'équivalences de tenseur, modulo une permutation d'indice, autrement dit, des tenseurs sans ordre.

L'analyse du concept de tenseur sans ordre conduit au « calcul extérieur », généralisant les concepts de déterminant et de produit vectoriel.

# Chapitre 2

## Masse

### 2.1 Analyse

#### 2.1.1 Topologie

**Définition 2.1** (topologie). *Une topologie d'un ensemble  $E$  est un ensemble  $T$  de parties de  $E$ , tel que*

$$\begin{aligned}\emptyset, E &\in T, \\ \forall A \subset T, \bigcup_{\omega \in A} \omega &\in T, \\ \forall \omega, \omega' \in T, \omega \cap \omega' &\in T.\end{aligned}$$

*Un fermé de  $E$  est le complémentaire d'un ouvert de  $E$ . Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie.*

$\{\emptyset, E\}$  est la topologie minimale ou la plus grossière de  $E$ ,  $\mathbf{P}[E]$  est la topologie maximale ou la plus fine de  $E$ , les topologies sont triviales.

Attention. Les fermés et les ouverts possèdent des propriétés complémentaires, non contraires!

Une union infinie d'ouverts ou une intersection *finie* d'ouverts est encore un ouvert. Une intersection infinie de fermés ou une union *finie* de fermés est encore un fermé.

**Théorème 2.1.** *Soit  $E$  un ensemble,  $T \subset \mathbf{P}[E]$ , et  $T' = \{E \setminus \omega, \omega \in T\}$ .  $T$  est une topologie si et seulement si*

$$\begin{aligned}\emptyset, E &\in T', \\ \forall A \subset T', \bigcap_{\varphi \in A} \varphi &\in T', \\ \forall \varphi, \varphi' \in T', \varphi \cup \varphi' &\in T'.\end{aligned}$$

**Définition 2.2** (voisinage, intérieur, adhérence, densité, bord). *Soit  $E$  un espace topologique,  $M \in E$ ,  $A \subset E$ .*

- *Un voisinage de  $M$  dans  $E$  est un ouvert de  $E$  contenant  $M$ .*
- *$M$  est intérieur à  $A$  s'il existe au moins un voisinage de  $M$  inclus dans  $A$ .*
- *$M$  est adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $M$  a une intersection non-vide avec  $A$ .*
- *L'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ .*
- *L'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .*
- *$A$  est dense dans  $E$  si  $\bar{A} = E$ .*
- *Le bord de  $A$  est  $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .*

$\overset{\circ}{A}$  est aussi l'ensemble des points intérieurs de  $A$ .  $\hat{A}$  est aussi l'ensemble des points adhérents à  $A$ ,  $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \hat{A}$ .

$$\begin{aligned} A \text{ ouvert} &\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}, \\ A \text{ fermé} &\Leftrightarrow A = \bar{A}, \\ A \text{ ouvert et fermé} &\Leftrightarrow \partial A = \emptyset. \end{aligned}$$

Soit  $E, F$  deux espaces topologiques. Topologies canoniques de  $(E, F)$  ou  $E^{(n)}$ . . . Soit  $P$  un ensemble (infini). La topologie de  $\mathbf{F}[P, E]$  est un problème d'analyse fonctionnelle.

Sous-espace topologique, topologie trace. . .

Espace topologique connexe : qui ne peut pas être partitionné en deux ouverts (ou deux fermés). Domaine : ouvert connexe. Composante connexe : partie ouverte et fermée, autrement dit, sans bord.

**Définition 2.3** (ouvert maximal). *Soit  $E$  un espace topologique et  $F$  un ensemble. Soit  $f \in \mathbf{F}[E, F]$ . L'ouvert maximal de  $f$  est le plus grand ouvert de  $E$  sur lequel  $f$  existe.*

**Définition 2.4** (support). *Soit  $E$  un espace topologique et  $(F, +)$  un groupe.*

- *Soit  $f \in \mathbf{F}[E, F]$ . Le support de  $f$  est le plus petit fermé  $S[f] \subset E$  où  $f$  prend au moins une valeur non-nulle.*
- *Soit  $\mu$  une fonctionnelle de  $E$  vers  $F$  (déf. 1.8). Le support de  $\mu$  est le plus petit fermé  $S[\mu]$  de  $E$ , tel que*

$$\forall (f \in \mathbf{F}[E, F], \exists \mu[f] \in F), (f[S[\mu]] \subset \{0\} \Rightarrow \mu[f] = 0).$$

La fonction nulle et la fonctionnelle nulle de  $E$  vers  $F$  ont un support vide. Le support de la fonctionnelle de Dirac de  $E$  vers  $F$  en  $x \in E$  (1.3) est

$$S[\delta_x] = \{x\}. \quad (2.1)$$

Exercice. Induire de (2.3 et 2.4) une définition de l'ouvert maximal d'une fonctionnelle. Comparer l'ouvert maximal et le support (d'une fonction ou d'une fonctionnelle).

Base de filtre, base de voisinage, limite...

Fonctions réelles sur un espace topologique : domination, équivalence asymptotique, notation de Landau.

**Définition 2.5** (fonction continue). *Soit  $E, F$  deux espaces topologiques et  $f \in \mathbf{F}[E, F]$ .  $f$  est continue si l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $E$ . Soit  $\mathbf{C}[E, F]$  l'ensemble des fonctions continues de  $E$  vers  $F$ . Soit  $\mathbf{AC}[E, F]$  l'ensemble des applications continues de  $E$  vers  $F$ .*

*Soit  $x \in E$  où  $f$  existe.  $f$  est continue en  $x$  si l'image réciproque par  $f$  de tout voisinage de  $f[x]$  dans  $F$  est un voisinage de  $x$ .*

Une fonction continue n'existe pas nécessairement partout (et la fonction qui existe nulle part est même trivialement continue). Mais, pour qu'une fonction soit continue en un point, il faut qu'elle existe en ce point. Une fonction partout continue est donc exactement une application continue.

**Théorème 2.2.** *Une fonction composée de fonctions continues est une fonction continue.*

*Les fonctions partielles d'une fonction à deux variables ou d'une  $n$ -fonction continue sont elles-mêmes continues.*

*Soit  $E$  un ensemble et  $F$  un espace vectoriel ordonné (déf. 1.40).  $\mathbf{AC}[E, F]$  est un espace vectoriel ordonné.*

En particulier la valeur absolue d'une application continue ou le maximum de deux est également une application continue.

**Théorème 2.3.** *Soit  $E, F$  deux espaces topologiques et  $f \in \mathbf{F}[E, F]$ .  $f$  est continue si et seulement si l'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $E$ .*

**Définition 2.6** (homéomorphisme). *Bijection continue dont la réciproque est continue.*

En combinant (déf. 2.5, thé. 2.3), on voit qu'un homéomorphisme envoie dans les deux sens un ouvert sur un ouvert, un fermé sur un fermé : c'est un isomorphisme topologique.

**Définition 2.7.** *Un espace topologique  $E$  est séparé si deux points distincts quelconques de  $E$  ont des voisinages disjoints dans  $E$  (Hausdorff).*

### 2.1.2 Distance

**Définition 2.8** (espace métrique). *Espace métrique : ensemble  $\mathcal{E}$  muni d'une distance  $d$ . Comme distance euclidienne...*

Topologie séparée des boules.

$\mathbb{R}$ , muni de  $d = (|x - y|, x, y \in \mathbb{R})$ , est un espace métrique.  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1[$ ,  $[0, \infty[$  sont-ils ouverts, fermés? Quels sont les intervalles ouverts, fermés?

Un espace affine euclidien, muni de la distance euclidienne, est un espace métrique.

Soit  $\mathcal{E}$  un espace métrique. Tout sous-ensemble de  $\mathcal{E}$ , muni de la distance restreinte, est encore un espace métrique, dit sous-espace métrique. Sa topologie est la topologie trace.

Distances sur  $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  :

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, d_p[(x, y), (x', y')] = (d[x, x']^p + d[y, y']^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.2)$$

$$d_\infty[(x, y), (x', y')] = d[x, x'] \vee d[y, y']. \quad (2.3)$$

Généralisation évidente à  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ,  $E^{(n)}$ ... Toutes ces distances sont topologiquement équivalentes, reproduisant la topologie canonique.

La fonction distance, à deux variables, de  $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  vers  $\mathbb{R}$ , est continue.

Suite infinie bornée, convergente. Toute suite convergente est bornée et *uniconvergente* (Cauchy). Toute suite uniconvergente est bornée.

Dans un espace métrique complet, toute suite uniconvergente est convergente.  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet, mais  $\mathbb{R}$  est complet. Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces métriques complets. Les espaces métriques  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ,  $E^{(n)}$  sont également complets.

**Théorème 2.4.** *Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces métriques.  $f \in \mathbf{A}[\mathcal{E}, \mathcal{F}]$  est continue en  $x \in \mathcal{E}$  si et seulement si*

- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in \mathcal{E}, (d[x, y] < \alpha \Rightarrow d[f[x], f[y]] < \epsilon)$  ;
- *l'image par  $f$  de toute suite infinie convergeant vers  $x$  est une suite infinie convergeant vers  $f[x]$ .*

Caractérisation d'un homéomorphisme : l'image ou l'image réciproque de toute suite convergente est une suite convergente.

**Définition 2.9** (application unicontinue). *Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces métriques.  $f \in \mathbf{A}[\mathcal{E}, \mathcal{F}]$  est unicontinue si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathcal{E}, (d[x, y] < \alpha \Rightarrow d[f[x], f[y]] < \epsilon).$$

**Théorème 2.5.** *La composée de deux applications unicontinues est unicontinue. L'image par une application unicontinue d'une suite uniconvergente en est encore une.*

Exercice. Soit  $x = (n^{-1} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$  et  $f = (x^{-1} \text{ in } \mathbb{R}, x \in ]0, 1])$ . La suite  $x$  et la suite image  $f[x]$  (déf. 1.11) sont-elles uniconvergentes? Conséquence sur  $f$ ?

**Définition 2.10** (partie bornée d'un espace métrique). *Un sous-ensemble  $A$  d'un espace métrique  $\mathcal{E}$  est borné si  $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in A, d[x, y] < k$ .*

**Définition 2.11.** *Un sous-ensemble  $A$  d'un espace métrique  $\mathcal{E}$  est compact si, de toute  $A$ -suite infinie, on peut extraire une sous-suite convergente, dont la limite appartient à  $A$  (Bolzano-Weierstrass).*

Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  des espace métriques compacts. Les espaces métriques  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{E}^{(n)}$  sont également compacts. Exercice : montrer qu'un compact d'un espace métrique complet est complet.

**Théorème 2.6.** *Tout (sous-ensemble) compact (d'un espace métrique) est fermé borné.*

**Théorème 2.7.** *L'image continue d'un compact est compacte.*

**Théorème 2.8.** *Une application continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est unicontinue (Heine-Borel).*

**Définition 2.12.** *Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces métriques et  $f \in \mathbf{A}[\mathcal{E}, \mathcal{F}]$ .  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k \geq 0$  en  $x \in E$  s'il existe un voisinage  $A$  de  $x$  dans  $\mathcal{E}$ ,*

$$\forall y \in A, d[f[x], f[y]] \leq kd[x, y].$$

$f$  est lipschitzienne de rapport  $k \geq 0$  si

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, d[f[x], f[y]] \leq kd[x, y].$$

Si  $f$  est lipschitzienne en  $x$ , alors elle est continue en  $x$ . Si  $f$  est lipschitzienne, alors est unicontinue.

Composée de deux applications lipschitziennes...

### 2.1.3 Norme

**Définition 2.13** (espace vectoriel normé). *Comme norme euclidienne...*

Semi-norme... Semi-norme croissante, comme (1.64).

**Définition 2.14** (espace vectoriel normé ordonné). *(déf. 2.13) et (1.64)*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. La norme induit une distance, donc  $E$  est aussi un espace métrique. La norme est lipschitzienne de rapport 1.

Soit  $E$  un espace vectoriel normé complet, et  $F$  un sous-espace vectoriel.  $F$  est également un espace vectoriel normé (pour la même norme).  $F$  est complet si et seulement si  $F$  est fermé dans  $E$ .

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels normés. En remplaçant, dans (2.2, 2.3), les distances par des normes, on obtient des normes topologiquement équivalentes sur  $(E, F)$ ,  $E^{(n)}$ .

Les lois de  $E$  (interne sur  $(E, E)$ , externe sur  $(\mathbb{R}, E)$ ) sont continues.

**Théorème 2.9.** *Une application affine sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si sa partie linéaire est continue.*

**Théorème 2.10.** *Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels normés et  $f \in \mathbf{Li}[E, F]$ . Voici des propositions équivalentes :*

- $f$  est continue,
- $f$  est continue en zéro,
- $f$  est unicontinue,
- $f$  est lipschitzienne,
- $f$  est lipschitzienne en zéro,
- l'image par  $f$  de la sphère unité  $\{x \in E, \|x\| = 1\}$  est bornée.

L'ensemble  $\mathbf{LiC}[E, F]$  des applications linéaires continues de  $E$  vers  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{Li}[E, F]$ .

### 2.1.4 Espace vectoriel normé de dimension finie

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{(n)}$  est normé par

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_\infty = \sup[|x_i|, i = 1 \dots n]. \quad (2.4)$$

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \|(x_1 \dots x_n)\|_p = \left( \sum_{i=1 \dots n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.5)$$

Dans (2.5),  $p = 2$  redonne la norme euclidienne (déf. 1.76),  $p \rightarrow \infty$  redonne (?norRnInfinie).

Exercice. Vérifier que, pour tout  $p \in \mathbb{R}^{+\ast} \cup \{\infty\}$ ,  $(\mathbb{R}^{(n)}, \|\bullet\|_p)$  est un espace vectoriel normé ordonné (déf. 2.14). Comparer  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$  et  $\|x\|_\infty$ .

Inégalité de Hölder sur  $\|\bullet\|_p$ ,  $p \in \mathbb{R}^+$ , généralisant (thé. 1.20)...

Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^{(n)}$  sont topologiquement équivalentes (on en choisit une). De plus, un espace vectoriel ou affine de dimension finie  $n$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{(n)}$ , via (déf. 1.44).

$\mathbb{R}^{(n)}$  est complet.

Dans  $\mathbb{R}^{(n)}$ , les compacts sont exactement les fermés bornés ; tout parallélépipède est compact ; la sphère unité (image réciproque du fermé  $\{1\}$  par la norme, continue) est fermée, bornée, compacte. Dans  $\mathbb{R}$ , les intervalles compacts de sont les intervalles fermés bornés.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^{(n)}$ . L'image par  $f$  de la sphère unité est compacte (thé. 2.7). Le théorème suivant donne une réciproque partielle.

**Théorème 2.11.** *Toute application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue.*

*Démonstration.* D'après (thé. 2.10), il suffit que l'image de la sphère unité soit bornée. Choisir une base, décomposer un vecteur unitaire...  $\square$

**Théorème 2.12.** *Soit  $A, B$  deux compacts de  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Toute bijection continue  $f$  de  $A$  vers  $B$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $a$  un fermé de  $A$ .  $a$  est dans  $\mathbb{R}^{(n)}$  la trace d'un fermé, l'intersection de deux fermés, fermé, borné, compact. D'après (thé. 2.7),  $f[a]$  est compact, donc fermé. L'image de tout fermé de  $A$  par  $f$  est fermée. L'image réciproque de tout fermé de  $A$  par  $f^{-1\circ}$  est fermée. D'après (thé. 2.3),  $f^{-1\circ}$  est continue.  $\square$

**Théorème 2.13.** *Toute fonction continue sur un espace métrique compact vers un fermé de  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes (Weierstrass).*

## 2.1.5 Différentielle

### Différentielle en un point

**Définition 2.15.** *Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un espace vectoriel normé  $E$  et  $\mathcal{F}$  un espace affine sur un espace vectoriel normé  $F$ . Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $M \in \mathcal{E}$  et  $A \subset \mathcal{E}$  un voisinage de  $M \in \mathcal{E}$ , où  $f$  existe. Une différentielle de  $f$  en  $M$  est (avec la notation de Landau)*

$$df_M \in \mathbf{LiC}[E, F], \quad f[M + x] = f[M] + df_M[x] + o[\|x\|].$$

$f$  est différentiable en  $M$  si et seulement si elle admet au moins une différentielle en  $M$  (Fréchet).

Il existe au plus une différentielle en  $M$ . Si  $f$  est différentiable en  $M$ , alors elle est lipschitzienne (donc continue) en  $M$ .

Une application affine continue  $f$  est partout différentiable, et sa différentielle est partout sa partie linéaire  $\text{Li}[f]$ , elle-même continue (thé. 2.9).

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, considéré comme un espace affine sur lui-même, et  $\mathcal{F}$  un espace affine sur un espace vectoriel normé  $F$ . Suivant (déf. 2.15),  $f \in \mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$  est différentiable en  $x \in E$  si et seulement si

$$\exists df_x \in \mathbf{LiC}[E, F], \forall dx \in E, f[x + dx] = f[x] + df_x[dx] + o[\|dx\|].$$

Traditionnellement, on note  $dx$  l'incrément de  $x$ , bien que  $dx$  ne soit la différentielle d'aucune fonction.

Soit  $(E, q)$  un espace euclidien,  $q[x] = \langle x, x \rangle$ .  $q$  est homogène de degré deux.

$$\forall x, dx \in E, \langle x + dx, x + dx \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle x, dx \rangle + O[\|h\|^2], \quad (2.6)$$

$$dq_x[dx] = 2\langle x, dx \rangle, \quad (2.7)$$

$$dq_x[x] = 2\langle x, x \rangle = 2f[x]. \quad (2.8)$$

**Théorème 2.14.** *Soit  $f$  une fonction différentiable sur un espace vectoriel normé  $E$ , considéré comme un espace affine sur lui-même.  $f$  est positivement homogène de degré  $k \in \mathbb{R}^{+*}$  ou homogène de degré  $k \in \mathbb{Z}^*$  si et seulement si*

$$\forall x \in E, df_x[x] = kf[x]$$

(Euler).

Le théorème 2.14 avec  $q = 2$  reproduit (2.8).

**Théorème 2.15.** *Une fonction composée de fonctions différentiables est elle-même différentiable :*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f[x]} \circ df_x.$$

Corollaire : la différentielle de l'inverse est l'inverse de la différentielle...

**Définition 2.16** (difféomorphisme). *Bijection différentiable dont la différentielle est bijective et dont la réciproque est encore différentiable.*

Un difféomorphisme est un homéomorphisme.

**Théorème 2.16.** Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{F}$  trois espaces affines respectivement sur les espaces vectoriels  $E, E', F$ , et  $f \in \mathbf{F}[(\mathcal{E}, \mathcal{E}'), \mathcal{F}]$ , différentiable en  $(M, M')$ . Les fonctions partielles de  $f$  sont différentiables respectivement en  $M, M'$ , et, suivant (déf. 1.12),

$$\forall (x, x') \in (E, E'), df_{M, M'}[x, x'] = df_1[M']_M[x] + df_2[M]_{M'}[x'].$$

**Théorème 2.17.** Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces affines sur des espaces vectoriels  $E, F$ ,  $n \geq 1$  et  $f \in \mathbf{F}[\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{F}]$ , différentiable en  $M \in E^{(n)}$ ,  $\text{ten}[M] = (M_i, i = 1 \dots n)$ . Pour tout  $i = 1 \dots n$ , d'après (déf. 1.22), la  $i^e$  fonction partielle de  $f$  est différentiable en  $M_i$  et, en sommant sur les indices répétés,

$$\forall x \in E^{(n)}, \text{ten}[x] = (x_i, i = 1 \dots n), df_M[x] = df_i[M_{(i)}]_{M_i}[x_i]. \quad (2.9)$$

### Champ de différentielle

La différentielle de  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est le champ  $df$ ,

$$\text{ten}[df] = (df_M \in \mathbf{LiC}[E, F], M \in \mathcal{E}).$$

Si  $df_M$  existe, alors  $f$  existe dans un voisinage de  $M$  et l'ouvert maximal (déf. 2.3) de  $f$  est non vide.  $df$  existe au plus sur l'ouvert maximal de  $f$ .

Mais  $\mathbf{LiC}[E, F]$  est encore un espace vectoriel normé et un espace affine sur lui-même. Soit  $M \in \mathcal{E}$  où  $f$  est différentiable. D'après (déf. 2.15),  $df$  est différentiable en  $M$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists ddf_M \in \mathbf{LiC}[E, \mathbf{LiC}[E, F]], \forall x \in E, df_{M+x} = df_M + ddf_M[x] + o[\|x\|], \\ \forall y \in E, ddf_M[x] \in \mathbf{LiC}[E, F], ddf_M[x][y] \in F. \end{aligned}$$

La différentielle seconde de  $f$  en  $M$  est  $ddf_M$ . La différentielle deuxième ou d'ordre deux de  $f$  en  $M$   $d^2f_M$ ,

$$\forall x, y \in E, d^2f_M[(x, y)] = ddf_M[x][y].$$

Soit  $\mathbf{LiPC}_n[E, F]$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires de  $E$  vers  $F$  partiellement continues. On passe de  $ddf_M$  à  $d^2f$  par un isomorphisme d'espace vectoriel, voisin de (1.7) :

$$\begin{aligned} \mathbf{LiC}[E, \mathbf{LiC}[E, F]] &\rightarrow \mathbf{LiPC}_2[E, F] \\ f &\mapsto g, \forall (x, y) \in E^{(2)}, g[(x, y)] = f[x][y]. \end{aligned}$$

**Définition 2.17.** Soit  $f$  une fonction d'un espace affine  $\mathcal{E}$  sur un espace vectoriel normé  $E$  vers un espace affine  $\mathcal{F}$  sur un espace vectoriel normé  $F$ . Soit  $M \in \mathcal{E}$ .

- Si  $f$  existe en  $M$ , alors la différentielle d'ordre zéro de  $f$  en  $M$  est  $f[M]$ ,  $d^0 f_M = f[M]$ .
- Si  $f$  est différentiable en  $M$ , alors la différentielle d'ordre un de  $f$  en  $M$  est  $df_M$ ,  $d^1 f_M = df_M$ .
- Pour tout  $k \geq 1$ , si  $d^k f_M$  existe sur un voisinage de  $M$  et est différentiable en  $M$ , alors

$$\begin{aligned} d^{k+1} f_M &= dd^k f_M \in \mathbf{LiPC}_{k+1}[E^{(k+1)}, F], \\ d^{k+1} f_M[(x_1 \dots x_k, y)] &= dd^k f_M[(x_1 \dots x_k)][y]. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \geq 0$ ,  $f$  est  $k$  fois différentiable en  $M$  si la différentielle d'ordre  $k$  en  $M$  existe.

Pour tout  $k \geq 0$ ,  $d^{k+1} f$  existe au plus sur l'ouvert maximal de  $d^k f$ .

**Définition 2.18.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un espace vectoriel normé  $E$  et  $\mathcal{F}$  un espace affine sur un espace vectoriel normé  $F$ . Soit  $A$  un ouvert de  $\mathcal{E}$ ,  $B \subset \mathcal{F}$ . Pour tout  $k \in \mathcal{N}$ , soit  $\mathbf{C}_k[A, B]$  l'ensemble des fonctions de  $A$  vers  $B$  admettant une différentielle d'ordre  $k$  continue en tout point de  $A$ .

En particulier, pour tout ouvert  $A \subset \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{C}_0[A, \mathcal{F}] = \mathbf{AC}[A, \mathcal{F}]$ .

Formules de Taylor, Taylor-MacLaurin, Taylor-Lagrange...

### Ensemble de départ de dimension finie

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Soit  $\mathcal{F}$  un espace affine sur un espace vectoriel  $F$ . D'après (thé. 2.11), toutes les applications linéaires de  $E$  vers  $F$  sont continues.

Soit  $f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}, \mathcal{F}]$  différentiable en  $t$ .  $df_t$  se réduit à la multiplication par le vecteur dérivé de  $f$  en  $t$  :

$$\begin{aligned} \exists Df[t] \in F, \forall dt \in \mathbb{R}, df_t[dt] &= Df[t]dt, \\ Df[t] &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f[t+dt] \ominus f[t]}{dt} = \frac{df}{dt}. \end{aligned}$$

Remarque : le symbole de dérivation est  $D$ , non  $'$ , parce qu'on a renoncé à  $\bullet'$  (autrement dit :  $'$  est un simple caractère).

Le théorème 2.15 devient, avec  $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \forall dt \in \mathbb{R}, D(g \circ f)[t]dt &= dg_{f[t]}[Df[t]dt], \\ D(g \circ f)[t] &= dg_{f[t]}[Df[t]], \end{aligned} \tag{2.10}$$

et, avec  $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} D(g \circ f)[t] &= Dg[f[t]]Df[t], \\ D(g \circ f) &= Dg \circ fDf. \end{aligned}$$

Dérivée d'ordre  $k \geq 0$  :  $D^0 f[t] = f[k]$ ,  $D^{k+1} f[t] = DD^k f[t]$ . Soit  $f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(2)}, \mathcal{F}]$  différentiable en  $x$ .

$$\begin{aligned} \forall(dx, dx') \in \mathbb{R}^{(2)}, \quad df_{x,x'}[dx, dx'] &= df_1[x']_x[dx] + df_2[x]_{x'}[dx'], \\ &= D(f_1[x'])[x]dx + D(f_2[x])[x']dx' \\ &= D_1 f[x, x']dx + D_2 f[x, x']dx', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f_{x,x'}[dx, dx'] &= D_1 D_1 f[x, x']dx^2 + D_2 D_1 f[x, x']dx dx' \\ &\quad + D_1 D_2 f[x, x']dx' dx + D_2 D_2 f[x, x']dx'^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Théorème 2.18.** *Les dérivées partielles d'ordre supérieur à deux, partout où elles existent, ne dépendent pas de l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive,*

$$\forall(x, x' \in \mathbb{R}, \exists(y = D_2 D_1 f[x, x'] \in \mathcal{F}, y' = D_1 D_2 f[x, x'] \in \mathcal{F})), \quad y = y'$$

(Schwarz).

$D_1, D_2$  commutant, on pose

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad D_{i,j} = D_1^i D_2^j, \quad (2.12)$$

et (2.11) devient

$$d^2 f_{x,x'}[dx, dx'] = D_{2,0} f[x, x']dx^2 + 2D_{1,1} f[x, x']dx dx' + D_{0,2} f[x, x']dx'^2.$$

Exercice : développer de même  $d^k f_{x,x'}[dx, dx']$  en faisant apparaître les coefficients binomiaux.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathcal{F}]$ , différentiable en  $x$ ,  $\text{ten}[x] = (x_i, i = 1 \dots n)$ , en sommant sur les indices répétés,

$$\begin{aligned} \forall dx \in \mathbb{R}^{(n)}, \quad \text{ten}[dx] &= (dx_i, i = 1 \dots n), \\ df_x[dx] &= df_i[x_{(i)}]_{x_i}[dx_i] = D_i f[x]dx_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} d^2 f_x[dx] &= \sum_{i,j=1 \dots n} D_i D_j f[x]dx_i dx_j \\ &= \sum_{i=1 \dots n} D_i^2 f[x]dx_i dx_i + 2 \sum_{i < j=1 \dots n} D_i D_j f[x]dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Exercice : développer de même  $d^k f_x[dx]$ , en faisant apparaître les coefficients multinomiaux.

Remarque : tant que  $n$  n'est pas connu dans (2.14), il est rigoureusement impossible de généraliser (2.12) (Cantor).

**Théorème 2.19.** *Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$  et  $k \in \mathbb{N}$ .  $f \in \mathbf{C}_k[A, \mathcal{F}]$  si et seulement si ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues en tout point de  $A$ .*

Le théorème 2.19 est, pratiquement, un critère de différentiabilité, théoriquement, une réciproque partielle, avec  $k = 0$ , de (thé. 2.2) ou, avec  $k \geq 1$ , de (thé. 2.17).

### Ensemble d'arrivée de dimension finie

Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , et  $f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)}]$ , différentiable en  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$ ,

$$\begin{aligned} \text{ten}[x] &= (x_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n), \text{ ten}[f] = (f[x] \in \mathbb{R}^{(p)}, x \in \mathbb{R}^{(n)}), \\ f[x] &= (f_j[x], j = 1 \dots p) = (f_j[(x_i, i = 1 \dots n)], j = 1 \dots p). \end{aligned}$$

(2.13) fait apparaître un produit contracté suite-matrice (déf. 1.71) :

$$df_x[dx]_j = D_i f_j[x] dx_i = dx_i D_i f_j[x]. \quad (2.14)$$

**Définition 2.19** (matrice jacobienne). *La matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  est*

$$Df[x] = (D_i f_j[x], i = 1 \dots n, j = 1 \dots p).$$

*La matrice jacobienne de  $f$  est*

$$Df = (D_i f_j, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p) \in \mathbf{F}[\mathbb{R}, \mathbb{R}]^{(n,p)}$$

*(Jacobi).*

La matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  est une matrice réelle de dimension  $(n, p)$ . Avec  $n = 1$ , elle se réduit à une dérivée (à un isomorphisme d'espace vectoriel près).

On poursuit (2.14) à l'aide de (déf. 2.19).

$$df_x[dx] = dx \cdot Df[x] = Df[x]^t \cdot dx. \quad (2.15)$$

La matrice jacobienne de  $f$  en  $x$ , transposée, est donc la matrice (déf. 1.72) de l'application linéaire  $df_x$  dans les bases canoniques :

$$\text{ten}[df_x] = Df[x]^t.$$

Soit

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ \mathbb{R}^{(n)} & \rightarrow & \mathbb{R}^{(p)} & \rightarrow & \mathbb{R}^{(q)} \\ x & \mapsto & y & \mapsto & z \end{array}$$

Suite à (thé. 2.15),

$$\begin{aligned} D(g \circ f)[x]^t &= Dg[f[x]]^t \cdot Df[x]^t, \\ D(g \circ f)[x] &= Df[x] \cdot Dg[f[x]], \\ \forall (i = 1 \dots n, j = 1 \dots p, k = 1 \dots q), D_i(g \circ f)_k[x] &= D_i f_j[x] D_j g_k[f[x]], \end{aligned}$$

**Théorème 2.20** (des fonctions implicites). *Soit  $A, B$  deux ouverts respectivement de  $\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)}$  et  $f \in \mathbf{C}_1[(A, B), \mathbb{R}^{(n)}]$ ,  $f[x, y] = 0$ . Si  $\det[D(f_1[y])[x]] \neq 0$ , alors il existe un voisinage  $(A_1, B_1)$  de  $(x, y)$  dans  $(\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)})$ , tel que, pour tout  $y' \in B_1$ , l'équation  $f[x', y'] = 0$  ait une solution unique  $x' = g[y'] \in A_1$ ,*

$$\exists! g \in \mathbf{C}_1[B_1, A_1], \forall y' \in B_1, f[g[y'], y'] = 0.$$

Intuitivement, si on linéarise  $f[x, y] = 0$  au voisinage de 0, la matrice jacobienne carrée de la première fonction partielle de  $f$ , de déterminant non nul, peut être inversée pour exprimer  $dx = x' - x$  en fonction de  $dy = y' - y$  :

$$\begin{aligned} 0 &\approx df_{x,y}[\bullet, y][dx] + df_{x,y}[x, \bullet][dy] = D(f_1[y])[x].dx + D(f_2[x])[y].dy, \\ dx &\approx -D(f_1[y])[x]^{-1} \circ [D(f_2[x])[y].dy]. \end{aligned}$$

**Théorème 2.21.** *Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^{(p)}$  et  $f \in \mathbf{C}_1[A, B]$  une bijection.  $f$  est un difféomorphisme (déf. 2.16) si et seulement si*

$$\forall x \in A, \det[Df[x]] \neq 0.$$

*Démonstration.* Appliquer (thé. 2.20) en remplaçant  $f$  par  $(x, y) \mapsto f[x] - y$ .  $x = g[y]$  résout localement  $f[x] - y = 0$ ,  $g \in \mathbf{C}_1[B_1, A_1]$  coïncide avec  $f^{-1} \circ$  sur  $B_1$ .  $\square$

Le théorème 2.21 sert à reconnaître un difféomorphisme, comme le théorème 2.12 sert à reconnaître un homéomorphisme.

### Différentielle de forme, forme différentielle

Ici,  $p = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$  et une forme  $f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]$ , différentiable en  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$ .

$$df_x \in \mathbf{Li}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}], \quad df \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbf{Li}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]].$$

**Définition 2.20** (tenseur jacobien). *Le tenseur jacobien de  $f$  en  $x$  est*

$$Df[x] = (D_i f[x], i = 1 \dots n).$$

**Définition 2.21.** *Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Une forme différentielle d'ordre  $n$  sur  $A$  est  $\phi \in \mathbf{A}[A, \mathbf{Li}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]]$ .*

$$\forall i = 1 \dots n, \exists f_i \in \mathbf{A}[A, \mathbb{R}], \forall x \in A, \phi[x] = (f_i[x] dx_i, (dx_1 \dots dx_n) \in \mathbb{R}^{(n)}). \quad (2.16)$$

**Définition 2.22** (primitive). *Soit  $B$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$ ,  $B \subset A$ .  $\phi$  admet une primitive sur  $B$  si  $\exists f \in \mathbf{A}[B, \mathbb{R}^{(n)}]$ ,  $\forall x \in B$ ,  $df_x = \phi[x]$ , et alors  $f$  est une primitive de  $\phi$  sur  $B$ .*

### Équation différentielle

Une équation différentielle est une équation fonctionnelle, portant sur une fonction et ses dérivées. Exemple :  $f = Df$ ,  $f \in \mathbf{C}_1[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ , a pour solution  $f$ ,  $f[x] = e^x$ .

**Théorème 2.22.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un espace vectoriel normé complet,  $A$  un ouvert de  $(\mathbb{R}, E)$ , et  $f$  une application continue de  $A$  vers  $E$ , tels que, pour tout  $(t, x) \in A$ , il existe un voisinage  $B$  de  $(t, x)$  dans  $A$  et  $k \geq 0$ ,*

$$\forall ((t', x', y') \in (\mathbb{R}, E, E), ((t', x'), (t', y')) \in (B, B)), \|f[t', y'] - f[t', x']\| \leq k \|y' - x'\|.$$

*Quel que soit  $(t, x) \in A$ , il existe un intervalle  $J$  de longueur non-nulle, de centre  $t$ ,*

$$\exists ! X \in \mathbf{A}[J, E], X[t] = x, \forall t' \in J, DX[t'] = f[t', X[t']]$$

(Cauchy-Lipschitz).

*Démonstration.* Théorème de point fixe.  $E$  est complet. □

- Équation différentielle affine :  $A = (I, E)$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et, pour tout  $t \in I$ , la seconde fonction partielle de  $f$  (déf. 1.12) est une application affine (déf. 1.50). Alors la condition de Lipschitz est vérifiée (thé. 2.11) et il existe même une solution unique sur tout  $I$ .
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$g \in \mathbf{Li}[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n], \{X \in \mathbf{A}[J, \mathbb{R}^n], DX = g \circ X\}$$

est un espace vectoriel de dimension  $n$ , engendré par une famille de fonctions, dont chacune est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle...

- Une solution d'une équation différentielle non-linéaire peut exploser (diverger en un temps fini).
- Sans la condition de Lipschitz, on sait prouver l'existence, et on connaît des cas de non-unicité [9].
- Équation différentielle « implicite » :  $g[t', X[t'], DX[t']] = 0$ . Une quadrature (pour une équation algébrique) ou (thé. 2.20) permet d'exprimer  $DX[t']$  en fonction de  $t', X[t']$ , pour se ramener à (thé. 2.22).
- Équation différentielle « mal posée » :  $a[t'][DX[t']] = g[t', X[t']]$ , où l'opérateur  $a[t]$  est dégénéré en  $t$  isolé : résoudre d'abord de part et d'autre de  $t$ , puis recoller les morceaux.

### 2.1.6 Prolongement continu ou croissant

#### Application unicontinue

**Théorème 2.23.** *Soit  $\mathcal{E}$  un espace métrique et  $\mathcal{F}$  un espace métrique complet,  $A$  une partie dense de  $\mathcal{E}$ , et  $f$  une application unicontinue (déf. 2.9) de  $A$  vers  $\mathcal{F}$ . Il existe une unique application continue  $\bar{f}$ , prolongeant  $f$  de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{F}$ . En outre,  $\bar{f}$  est unicontinue.*

*Démonstration.* Corollaire de (thé. 2.5). □

#### Application linéaire continue

**Théorème 2.24.** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace vectoriel dense,  $G$  un espace vectoriel normé complet, et  $f$  une application linéaire continue de  $F$  vers  $G$ . Il existe une unique application linéaire continue  $\bar{f}$ , prolongeant  $f$  sur  $E$ . En outre,  $\|\bar{f}\| = \|f\|$ .*

*Démonstration.* Corollaire de (thé. 2.23), parce qu'une application linéaire continue est unicontinue (thé. 2.10). □

### Forme linéaire continue

**Théorème 2.25.** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace vectoriel et  $f$  une forme linéaire continue sur  $F$ .  $f$  peut être prolongée en une forme linéaire continue  $\bar{f}$  sur  $E$ , telle que  $\|\bar{f}\| = \|f\|$  (Hahn, Banach).*

*Démonstration.* [25, thé. 9.3.1], [6, ch. I]. □

### Fonction réelle croissante

**Définition 2.23.** *Soit  $E$  un ensemble ordonné et  $f \in \mathbf{F}[E, \mathbb{R}]$  croissante, existant sur  $F \subset E$ . Soit  $x \in E$  et  $y_1, y_2 \in F$ ,  $y_1 \leq x \leq y_2$ ,*

$$f_1[x] = \sup_{x \geq y_1 \in F} f[x] \in \mathbb{R}, \quad f_2[x] = \inf_{x \leq y_2 \in F} f[x] \in \mathbb{R}.$$

$x \in E$  est  $f$ -able,  $x \in \bar{F}$ , si

$$\begin{aligned} \exists(y_1, y_2 \in F, y_1 \leq x \leq y_2), \quad f_1[x] &= f_2[x]. \\ \forall x \in \bar{F}, \quad \bar{f}[x] &= f_1[x]. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est croissante,  $f_1[x] \leq f_2[x]$  et on a égalité si et seulement si  $x$  est  $f$ -able. Si  $x \in F$ , alors  $\bar{f}[x] = f[x]$ .  $\bar{f}$  est l'unique prolongement croissant de  $f$  sur  $\bar{F}$ .

### Forme linéaire positive

Soit  $E$  un espace vectoriel ordonné et  $\mu$  une forme linéaire positive, existant sur un sous-espace vectoriel ordonné  $F$  et prolongée sur  $\bar{F}^+$  en  $\bar{\mu}$  selon (déf. 2.23).

**Définition 2.24.**  $x \in E$  est  $\mu$ -able,  $x \in \bar{F}$ , si  $x^\pm \in \bar{F}^+$ .

$$\forall x \in \bar{F} \setminus \bar{F}^+, \quad \bar{\mu}[x] = \bar{\mu}[x^+] - \bar{\mu}[x^-].$$

**Théorème 2.26.**  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel ordonné de  $E$ ,  $\bar{F}^+ = \overline{\bar{F}^+}$ , et  $F$  est un sous-espace vectoriel ordonné de  $\bar{F}$ .  $\bar{\mu}$  est une forme linéaire positive sur  $\bar{F}$ .

*Démonstration.*  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  :

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in \bar{F}^+, \exists y_2, y'_2 \in F^+, 0 \leq x \leq y_2, 0 \leq x' \leq y'_2, \\ \forall (y_1, y'_1, y_2, y'_2 \in F^+, y_1 \leq x \leq y_2, y'_1 \leq x' \leq y'_2), \\ \mu[y_1] + \mu[y'_1] \leq \mu[x + x'] \leq \mu[y_2] + \mu[y'_2], \\ x + x' \in \bar{F}^+, \bar{\mu}[x + x'] = \bar{\mu}[x] + \bar{\mu}[x'], \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha x \in \bar{F}^+, \bar{\mu}[\alpha x] = \alpha \bar{\mu}[x]. \\ \forall x, x' \in \bar{F}, (x + x')^\pm = x^\pm + x'^\pm \in \bar{F}^+, x + x' \in \bar{F}, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^\pm, (\alpha x)^\pm = \pm \alpha x^\pm \in \bar{F}^+, (\alpha x)^- = \pm \alpha x^\pm \in \bar{F}^+, \alpha x \in \bar{F}. \end{aligned}$$

Soit  $x \in \bar{F}$ . D'après (2.24),  $x = x^+ - x^-$ ,  $x^\pm \in \bar{F}^+ \subset \bar{F}^+$ .  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel ordonné de  $E$  (thé. 1.8). Soit  $x \in \bar{F}^+$ .  $x = x^+ \in \bar{F}^+$ , donc  $\bar{F}^+ = \bar{F}^+$ .  $\bar{\mu}$  est une forme additive et positivement homogène sur  $\bar{F}^+$ . Mais  $\forall x \in \bar{F}^+$ ,  $\bar{\mu}[-x] = -\bar{\mu}[x]$  donc  $\bar{\mu}$  est additive et homogène sur  $\bar{F}$ .  $\square$

D'après (thé. 2.24), si  $F$  est dense dans  $\bar{F}$  normé et  $\mu$  continue, alors  $\bar{\mu}$  est l'unique forme linéaire prolongeant  $\mu$  sur  $\bar{F}$ ,  $\bar{\mu}$  est continue et  $\|\bar{\mu}\| = \|\mu\|$ .

Mais pour quelle norme? Comme  $\bar{\mu}$  est une forme linéaire positive sur  $\bar{F}$ ,  $(\bar{\mu}[|x|] \in \mathbb{R}, x \in \bar{F})$  est déjà une semi-norme et on tire une norme selon la méthode du quotient.

**Théorème 2.27.** *Soit  $\sim$  une relation d'équivalence dans  $\bar{F}$ , telle que la loi  $+$  de  $\bar{F}$ , toute homothétie sur  $\bar{F}$  et  $\bar{\mu}$  soient compatibles (déf. 1.25) avec  $\sim$  et*

$$\forall x \in \bar{F}^+, (\bar{\mu}[x] = 0 \Rightarrow x \sim 0). \quad (2.17)$$

*Soit  $\tilde{x}$  la classe d'équivalence (modulo  $\sim$ ) de  $x \in \bar{F}$ ,  $\tilde{A}$  l'ensemble quotient de  $A \subset \bar{F}$  et  $\tilde{\mu}$  la forme quotient de  $\bar{\mu}$ .*

*$\tilde{\mu}$  est positivement non-dégénérée (déf. 1.43).  $\tilde{F}$  est un espace vectoriel normé ordonné (déf. 2.14),*

$$\nu_1 = (\|x\|_1 = \tilde{\mu}[|x|] \in \mathbb{R}, x \in \tilde{F}), \quad \tilde{F}^+ = \tilde{F}^+. \quad (2.18)$$

*( $\tilde{x} \in \tilde{F}$ ,  $x \in \bar{F}$ ) est une application linéaire positive,  $\tilde{F}$  est un sous-espace vectoriel normé ordonné de  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{F}^+ = \tilde{F}^+$ .*

*$\tilde{F}^+, \tilde{F}$  sont respectivement denses dans  $\tilde{F}^+, \tilde{F}$ ,  $\tilde{F}^+ = \tilde{F}^+, \tilde{F} = \tilde{F}$ .  $\tilde{\mu}$  est l'unique forme linéaire continue prolongeant  $\tilde{\mu}$  sur  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}$ . En outre, elle est positive et de norme sphérique un.*

Par exemple, on peut prendre pour  $\sim$  la relation iso- $\mu$ , ou une plus fine, pourvu que  $+$  et une homothétie quelconque soient encore compatibles avec elle.

*Démonstration.* Soit  $x \in \bar{F}^+$ . D'après (déf. 2.24),

$$\sup_{x \geq y_1 \in F^+} \mu[y_1] = \bar{\mu}[x] = \inf_{x \leq y_2 \in F^+} \mu[y_2].$$

Comme  $\bar{\mu} \in \mathbf{Li}[\bar{F}, \mathbb{R}]^+$  et  $(\tilde{x} \in \tilde{F}, x \in \bar{F})$  est une application linéaire positive,  $\tilde{\mu} \in \mathbf{Li}[\tilde{F}, \mathbb{R}]^+$ ,

$$\sup_{x \geq y_1 \in F^+} \mu[y_1] \leq \sup_{\tilde{x} \geq \tilde{y}_1 \in \tilde{F}^+} \mu[y_1], \quad \inf_{x \leq y_2 \in F^+} \mu[y_2] \leq \inf_{\tilde{x} \leq \tilde{y}_2 \in \tilde{F}^+} \mu[y_2].$$

Soit  $x \in \tilde{F}^+$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq y_1 \in \tilde{F}^+} \tilde{\mu}[y_1] &= \tilde{\mu}[x] = \inf_{x \leq y_2 \in \tilde{F}^+} \tilde{\mu}[y_2], \\ \inf_{x \geq y_1 \in \tilde{F}^+} \|x - y_1\|_1 &= 0 = \inf_{x \leq y_2 \in \tilde{F}^+} \|x - y_2\|_1. \end{aligned}$$

Dans  $\tilde{F}$  (muni de  $\nu_1$ ),  $x$  est adhérent à  $\{y_1 \in \tilde{F}^+, x \geq y_1 \in \tilde{F}^+\}$  et à  $\{y_2 \in \tilde{F}^+, x \leq y_2 \in \tilde{F}^+\}$ . Utiliser pour finir (thé. 2.24).  $\square$

Attention. Alors que  $\bar{F}$  n'a pas de sens topologique dans (déf. 2.24), la norme  $\nu_1$  lui en donne un (déf. 2.2).

Exercice (en complément de la démonstration de thé. 2.27). Soit  $E$  un espace vectoriel normé ordonné et  $F$  un sous-espace vectoriel normé ordonné. Montrer que si  $F^+$  est dense dans  $E^+$ , alors  $F$  est dense dans  $E$  ( $\bar{F} = E$ ). Et réciproquement ?

### Stabilité de $\bar{F}$

Comme  $\bar{F}$  est un espace vectoriel ordonné (thé. 2.26),  $\bar{F}$  est stable pour  $\vee, \wedge, |\bullet|$ .

**Théorème 2.28.** Soit  $\phi \in \mathbf{F}[\bar{F}, E]$ , telle que  $F^+$  soit stable pour  $\phi$  (déf. 1.24). Soit  $\phi'$  la restriction de  $\phi$  de  $F^+$  vers  $F^+$ , croissante et compatible avec  $\sim$  (déf. 1.25),

$$\forall x \in F^+, \tilde{\phi}'[\tilde{x}] = \phi[x]. \quad (2.19)$$

Si  $\tilde{\phi}'$  est unicontinue, alors  $\bar{F}^+$  est stable pour  $\phi$ .

*Démonstration.* On cherche des conditions suffisantes pour que  $\bar{F}^+$  soit stable pour  $\phi$ , c'est-à-dire (déf. 2.23)

$$\forall x \in \bar{F}^+, \exists y_2 \in F^+, 0 \leq \phi[x] \leq y_2, \mu_1[\phi[x]] = \mu_2[\phi[x]] ?$$

Soit  $F^+$  stable pour  $\phi$  et  $\phi'$  croissante. Soit  $x \in \bar{F}^+$ .  $\phi'$  est une application.

$$\begin{aligned} \exists y_2 \in F^+, \quad 0 \leq x \leq y_2, \\ \phi'[0], \phi'[y_2] \in F^+, \phi'[0] \leq \phi[x] \leq \phi'[y_2]. \end{aligned}$$

$\mu_1[\phi'[x]], \mu_2[\phi'[x]]$  existent. Sont-ils égaux ?

D'après (thé. 2.27),

$\forall i = 1, 2, \exists ((y_{i,n} \in F^+, n \in \mathbb{N}^*), \forall n \in \mathbb{N}^*, y_{1,n} \leq x \leq y_{2,n}), \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{y}_{i,n} - \tilde{x}\|_1 = 0$ ,

$$\mu \circ \phi'[y_{1,n}] \leq \mu_1[\phi[x]] \leq \mu_2[\phi[x]] \leq \mu \circ \phi'[y_{2,n}]. \quad (2.20)$$

On cherche à passer à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans (2.20) grâce à (thé. 2.4).  $\tilde{\mu}$  est continue sur  $\tilde{F}$  (thé. 2.27). Soit  $\phi'$  compatible avec  $\sim$ . Avec (2.19) et  $f = \tilde{\mu} \circ \phi'$ , (2.20) devient

$$f[\tilde{y}_{1,n}] \leq \mu_1[\phi[x]] \leq \mu_2[\phi[x]] \leq f[\tilde{y}_{2,n}].$$

Soit  $\tilde{\phi}'$  unicontinue. Grâce à (thé. 2.5),  $f$  est également unicontinue et  $f[\tilde{y}_{i,n}]$ , image unicontinue d'une  $\tilde{F}$ -suite uniconvergente, est une  $\mathbb{R}$ -suite uniconvergente, donc convergente.

$$\phi[x] \in \bar{F}^+, \quad \forall i = 1, 2, \quad \bar{\mu}[\phi[x]] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[y_{i,n}].$$

□

Remarque.  $\tilde{\mu}$  est linéaire, continue, donc unicontinue (thé. 2.10).  $f$  est unicontinue (thé. 2.5) sur  $\tilde{F}$ , dense dans  $\tilde{\tilde{F}}$  (thé. 2.27). D'après (thé. 2.23), il existe une unique application continue  $\bar{f}$  prolongeant  $f$  de  $\tilde{F}$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $\bar{f}[x] = \bar{\mu}[\phi[x]]$ .

Soit  $F$  une sous-algèbre ordonnée de  $E$ . Voici une application linéaire positive :

$$\phi = (x'x \in E, x \in \bar{F}), \quad x' \in F^+. \quad (2.21)$$

$F, F^+$  sont stables pour  $\phi$ ,  $\phi' = (x'x \in F, x \in F)$  est aussi une application linéaire positive. Si la loi interne multiplicative de  $F$  est compatible avec  $\sim$ , alors  $(\tilde{x} \in \tilde{F}, x \in F)$  est un morphisme d'algèbre ordonnée,  $\phi'$  est compatible avec  $\sim$  et si  $\tilde{F}$  est une algèbre normée ( $\forall x, x' \in \tilde{F}, \|xx'\|_1 = \|x\|_1 \|x'\|_1$ ), alors  $\tilde{\phi}'$  est continue :

$$\begin{aligned} \forall x \in \tilde{F}, \|\tilde{x}'x\|_1 &= \|\tilde{x}'\|_1 \|x\|_1, \\ \tilde{\phi}' \in \mathbf{LiC}[\tilde{F}, \tilde{F}], \|\tilde{\phi}'\| &= \|\tilde{x}'\|_1. \end{aligned}$$

$\tilde{\phi}'$  est unicontinue (thé. 2.10), et sa restriction de  $F^+$  vers  $F^+$  aussi. D'après (thé. 2.28),  $\bar{F}^+, \bar{F}$  sont stables pour  $\phi$ . Si de plus  $\|\tilde{x}'\|_1 = 1$  et  $x'$  est inversible dans l'algèbre  $F$ , alors  $\tilde{\phi}'$  est un automorphisme d'espace vectoriel normé (donc un homéomorphisme).

## 2.2 Analyse fonctionnelle

### 2.2.1 Espaces fonctionnels

#### Topologie faible

**Définition 2.25** (limite simple). Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{F}$  un espace métrique. La limite simple d'une suite infinie de fonctions  $s = (f_n \in \mathbf{F}[E, \mathcal{F}], n \in \mathbb{N}^*)$  est la fonction  $f \in \mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$ ,

$$\forall(x \in E, \exists y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n[x] \in \mathcal{F}), f[x] = y,$$

$$(f_n \in \mathbf{F}[E, \mathcal{F}], n \in \mathbb{N}^*) \rightsquigarrow f.$$

**Théorème 2.29.** Soit  $T' = \{A \subset \mathbf{F}[E, \mathcal{F}], \forall((f_n \in A, n \in \mathbb{N}^*) \rightsquigarrow f), f \in A\}$ . L'ensemble des complémentaires  $T = \{\mathbf{F}[E, \mathcal{F}] \setminus A, A \in T'\}$  est une topologie de  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$ .

*Démonstration.*  $\emptyset \in T'$ ,  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}] \in T'$ .

Soit  $A, B \in T'$  et  $s = (f_n \in A \cup B, n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $s \rightsquigarrow f$ . Pour tout  $n$ ,  $f_n \in A$  ou  $f_n \in B$ . On raisonne par disjonction de cas.

- Si  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f_n \in A$ , alors, comme  $A \in T'$ ,  $f \in A$ .
- Si  $\exists \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f_n \in B$ , alors, comme  $B \in T'$ ,  $f \in B$ .
- Sinon,  $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, f_n \in A, \exists p \geq N, f_p \in B$ . On peut extraire de  $s$  deux suites infinies, une dans  $A$ , une dans  $B$ ; plus précisément, il existe deux applications strictement croissantes  $a, b$  de  $\mathbb{N}^*$  vers lui-même,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{a[n]} \in A, \quad f_{b[n]} \in B,$$

$$s_A = (f_{a[n]} \in A, n \in \mathbb{N}^*) \in A, \quad s_B = (f_{b[n]} \in B, n \in \mathbb{N}^*) \in B.$$

Comme toute suite extraite d'une suite convergente de  $\mathcal{F}$  est également convergente, et a la même limite,  $s_A \rightsquigarrow f, s_B \rightsquigarrow f$ , et comme  $A \in T', B \in T', f \in A \cap B$ .

En tout cas,  $s \rightsquigarrow f \in A \cup B, A \cup B \in T'$ .

Soit  $P$  un ensemble et  $(A_x \in T', x \in P)$ . Soit  $s = (f_n \in \bigcap_{x \in P} A_x, n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $s \rightsquigarrow f$ . Pour tout  $n$  et pour tout  $x$ ,  $f_n \in A_x$ . Comme  $A_x \in T', f \in A_x$ . Donc  $f \in \bigcap_{x \in P} A_x, \bigcap_{x \in P} A_x \in T'$ .  $\square$

Les éléments de  $T'$  sont les fermés de  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$ , et leurs complémentaires, éléments de  $T$ , sont les ouverts de  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$ .

**Définition 2.26.** *Suite à (thé. 2.29), la topologie de la convergence faible de  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$  est  $T$ .*

Quelles propriétés (existence, linéarité, continuité, différentiabilité...) des  $f_n$  sont-elles conservées par le passage à la limite simple, et à quelles conditions ? Autrement dit, tel ou tel sous-espace (vectoriel) topologique de  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$  est-il fermé, pour la topologie faible ? Quelles fonctions sur  $\mathbf{F}[E, \mathcal{F}]$  sont continues pour la topologie faible ?

### Norme uniforme

Soit  $\mathcal{E}$  un espace métrique,  $K$  un compact (déf. 2.11) non-vide de  $\mathcal{E}$ , et  $F$  un espace vectoriel normé. L'espace vectoriel  $\mathbf{AC}[K, F]$  (thé. 2.2) est muni d'une norme, dite uniforme, dont l'existence résulte de (thé. 2.13) :

$$\forall f \in \mathbf{AC}[K, F], \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f[x]\|. \quad (2.22)$$

Dans (2.22), on réutilise  $\|\bullet\|_\infty$  (2.4) parce que

$$\forall f \in \mathbf{AC}[[0, 1], \mathbb{R}], \|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(f[\frac{i}{n}], i = 1 \dots n)\|_\infty. \quad (2.23)$$

Mais peut-on réutiliser  $\|\bullet\|_p$ ,  $p \in \mathbb{R}^{+*}$  (2.5) ?

La convergence en norme uniforme dans  $\mathbf{AC}[K, F]$  implique la convergence simple vers la même limite.

**Théorème 2.30.** *Si  $F$  est complet, alors  $\mathbf{AC}[K, F]$  est complet.*

Soit  $\mathbf{ACK}[\mathcal{E}, F]$  l'ensemble des applications de  $\mathcal{E}$  vers  $F$ , continues et à support compact (déf. 2.4). Attention :  $\mathbf{AC}[K, F]$  n'est pas en général une partie de  $F$ , mais l'ensemble des restrictions (1.4) sur  $K$  des fonctions appartenant à  $\mathbf{ACK}[\mathcal{E}, F]$ . Voici une forme continue non-nulle à support compact :

$$\begin{aligned} \text{ten}[\Omega] &= (\Omega[x] \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{(n)}), \quad \Omega[x] = \cos\left[\frac{\pi}{2}(\|x\| \wedge 1)\right], \\ \Omega &\in \mathbf{ACK}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]^*, \quad \|\Omega\|_\infty = 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Quel-est  $S[\Omega]$  ? Voici même une forme lisse ( $\mathbf{C}_\infty$ ) non-nulle à support compact (fig. 2.1) [21, ch. II].

L'espace vectoriel  $\mathbf{ACK}[\mathcal{E}, F]$  est normé par

$$\forall f \in \mathbf{ACK}[\mathcal{E}, F], \|f\|_\infty = \sup_{x \in S[f]} \|f[x]\|. \quad (2.25)$$

Exercice : si  $F$  est complet, alors  $\mathbf{ACK}[\mathcal{E}, F]$  est-il complet ?

FIG. 2.1 – Forme lisse à support compact

### Norme sphérique

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels.

**Théorème 2.31.** *Soit  $F$  normé, et  $(f_n \in \mathbf{Li}[E, F], n \in \mathbb{N}^*) \rightsquigarrow f \in \mathbf{A}[E, F]$ . Alors  $f$  est linéaire.*

*Démonstration.* Comme les lois de l'espace vectoriel normé  $F$  sont continues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n[\alpha x + y] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f_n[x] + f_n[y]) = \alpha f[x] + f[y] = f[\alpha x + y].$$

□

Soit  $E$  normé.  $\mathbf{LiC}[E, F]$  est muni d'une norme sphérique, dont l'existence découle de (thé. 2.10),

$$\forall f \in \mathbf{LiC}[E, F], \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|f[x]\|. \quad (2.26)$$

Suite à (thé. 2.31), si les  $f_n$  sont continues, alors leur limite simple  $f$ , déjà linéaire (thé. 2.31), est-elle aussi continue? - Oui, si  $(\|f_n\|, n \in \mathbb{N}^*)$  (2.26) est bornée. - La réciproque est vraie si  $E$  est complet (théorème de Banach-Steinhaus [25, thé. 8.5.1]).

La convergence en norme dans  $\mathbf{LiC}[E, F]$  implique la convergence simple vers la même limite.

**Théorème 2.32.** *Si  $F$  est complet, alors  $\mathbf{LiC}[E, F]$  est complet [25, thé. 8.6.1].*

### 2.2.2 Mesure

#### Forme fonctionnelle linéaire continue

$$E = \mathbf{A}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}] \quad (2.27)$$

est une algèbre ordonnée (déf. 1.43). En conséquence de (1.17),

$$\begin{aligned} \forall f, g \in E, f \vee g &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \\ f \wedge g &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\mu \in \mathbf{A}[F, \mathbb{R}]$  est une forme (sur  $F$ ) qui transforme des formes (sur  $\mathbb{R}^{(n)}$ ), donc  $\mu$  est aussi une fonctionnelle (déf. 1.8) de  $\mathbb{R}^{(n)}$  vers  $\mathbb{R}$ ;  $\mu$  est une forme fonctionnelle sur  $F$ . On pose

$$F = \mathbf{ACK}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]. \quad (2.29)$$

$F$  est une sous-algèbre ordonnée de  $E$  et un espace vectoriel normé (2.25) (mais non une algèbre normée!)

**Définition 2.27** (mesure). *Une mesure est une forme fonctionnelle linéaire continue sur  $F$  (Radon). Le dual topologique de  $F$  est l'ensemble des mesures,  $\mathbf{LiC}[F, \mathbb{R}]$ .*

Exemple. La mesure de Dirac en  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$  (1.3) :

$$\mu_x = (f[x] \in \mathbb{R}, f \in F), \|\mu_x\| = 1. \quad (2.30)$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^{(n)}$ .  $\mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]$  est un espace vectoriel normé (2.22).

**Définition 2.28** (mesure sur un compact). *Une mesure sur  $K$  est une forme fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]$ .*

Soit  $\mu_K$  une mesure sur  $K$ . On reconstruit logiquement le concept de masse.

**Définition 2.29** (charge, masse). *La charge de  $\mu_K$  est  $\mu_K[(1 \in \mathbb{R}, x \in K)]$ . Si  $\mu_K \geq 0$ , alors, au lieu de charge, on dit masse.*

Justification :  $(1 \in \mathbb{R}, x \in K) \in \mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]$ .

**Théorème 2.33.** *Soit  $\mu \in \mathbf{Li}[\mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]]$ . Si  $\mu \geq 0$  (déf. 1.53), alors  $\mu$  est une mesure sur  $K$ .*

*Démonstration.* Il ne manque que la continuité de  $\mu$ . Soit  $f \in \mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]$ ,  $\|f\|_\infty = 1$ . Comme  $\mu$  est positive, elle est croissante (thé. 1.13),

$$\begin{aligned} \forall x \in K, -1 \leq f[x] \leq 1, \\ \mu[(-1 \in \mathbb{R}, x \in K)] \leq \mu[f] \leq \mu[(1 \in \mathbb{R}, x \in K)], \\ |\mu[f]| \leq \mu[(1 \in \mathbb{R}, x \in K)]. \end{aligned}$$

□

En outre, la norme sphérique d'une mesure positive sur un compact est aussi sa masse,

$$\|\mu\| = \mu[(1 \in \mathbb{R}, x \in K)].$$

**Théorème 2.34.** *Soit  $\mu \in \mathbf{Li}[F, \mathbb{R}]$ . Si  $\mu \geq 0$  et  $S[\mu]$  est compact, alors  $\mu$  est une mesure.*

*Démonstration.*  $\mu$  est une fonctionnelle sur  $\mathbb{R}^{(n)}$  (déf. 1.8, thé. 1.1), possède un support  $K \subset \mathbb{R}^{(n)}$  (déf. 2.4). Soit  $f \in F$ ,  $\|f\|_\infty = 1$ . Comme dans la démonstration de (thé. 2.33),  $|\mu[f]| \leq \mu[|f|]$ .  $K$  est compact,

$$\begin{aligned} \exists m \in F, \|m\|_\infty = 1, m \geq \chi_K, \\ \mu[|f|] = \mu[|f| m] \leq \mu[\|f\|_\infty m] = \mu[m]\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc  $\mu$  est continue. □

En outre,

$$\|\mu\| = \inf_{\substack{m \geq \chi_K, \\ m \in F}} \mu[m]. \quad (2.31)$$

En rapprochant (2.26, 2.31), il apparaît que  $\|\mu\|$  est à la fois un supremum de  $\mu$  sur la sphère unité et un infimum sur les formes majorant  $\chi_K$ , c'est-à-dire, une valeur de selle.

Exemples. - Pour tout  $f \in F$ , soit  $f_K$  la restriction de  $f$  à  $K$ ,  $f_K \in \mathbf{AC}[K, \mathbb{R}]$ . En posant  $\mu[f] = \mu_K[f_K]$ , on obtient  $\mu \in \mathbf{Li}[F, \mathbb{R}]$ ,  $S[\mu] \subset K$ , donc  $\mu$  est une mesure. - (2.1) confirme l'existence de la mesure de Dirac  $\mu_x$  (2.30).

**Théorème 2.35.** *Soit  $\mu$  une mesure et  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$ . Si le support de  $\mu$  est  $\{x\}$ , alors  $\mu$  est proportionnelle à  $\mu_x$ .*

*Démonstration.*  $\mu$  est une application linéaire et  $\mu[f]$  ne dépend que de  $f[x]$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in F, \mu[f] = \alpha f[x]$ . □

### Prolongement

$\mu \in \mathbf{Li}[F, \mathbb{R}]^+$  se prolonge en une forme fonctionnelle linéaire positive  $\bar{\mu}$  sur l'espace vectoriel ordonné  $\bar{F}$  (thé. 2.26).  $\bar{F}$  est un sous-espace ordonné de  $E$ .  $\tilde{\mu}$  est continue sur  $\tilde{\bar{F}}$  (thé. 2.27).

Attention.  $\bar{F}$  est muni de la norme uniforme, alors que  $\tilde{\bar{F}}$  est muni de la norme  $\nu_1$  (2.18).  $\bullet$  ne laisse pas d'ambiguïté sur la norme.

**Définition 2.30** (mesure de forme). *La mesure  $\mu$  de  $f \in \bar{F}$  est  $\bar{\mu}[f] = \tilde{\mu}[\tilde{f}]$ .*

Exemple (2.30).

$$\forall x \in \mathbb{R}^{(n)}, \forall f \in \bar{F}^+, \sup_{f \geq g_1 \in F^+} g_1[0] = \bar{\mu}_x[f] = \inf_{f \leq g_2 \in F^+} g_2[0].$$

Relation d'équivalence  $\sim$ ,

$$\forall f \in \bar{F}, f\tilde{0} \Leftrightarrow \bar{\mu}_x[f] = 0,$$

vérifiant (2.17). D'après (thé. 2.27),  $\bar{F}^+, \tilde{F}$  sont denses dans  $\tilde{F}^+, \tilde{\bar{F}}$ .  $\bar{F}$  est le sous-espace vectoriel ordonné des formes bornées à support compact continues en zéro.

$$\begin{aligned} \forall f \in \bar{F}, \bar{\mu}_x[f] = \tilde{\mu}_x[\tilde{f}] = f[0], \quad \|\tilde{f}\|_1 = |f[0]|, \\ \tilde{f} = 0 \Leftrightarrow f[0] = 0, \quad \tilde{f} \geq 0 \Leftrightarrow f[0] \geq 0. \end{aligned}$$

$\tilde{\mu}_x$  est l'unique forme linéaire continue prolongeant  $\tilde{\mu}_x$ , et un isomorphisme d'algèbre normée (donc un homéomorphisme) de  $\tilde{\bar{F}}$  vers  $\mathbb{R}$ . On reprend (2.21) :

$$\phi = (f'f \in E, f \in \bar{F}^+), f' \in F^+.$$

$\tilde{\phi}'$  est unicontinue,  $\bar{F}^+, \bar{F}$  sont stables pour  $\phi$  (thé. 2.28). On le vérifie de manière élémentaire sur les limites en zéro. À quelle condition sur  $f'$   $\phi$  est-elle un automorphisme d'espace vectoriel normé (donc un homéomorphisme) ?

### Mesure de partie

**Définition 2.31** (clan). *Un clan d'un ensemble  $E$  est un ensemble  $T$  de parties de  $E$ , tel que*

$$\begin{aligned} \emptyset, E \in T, \\ \forall \omega, \omega' \in T, \omega \cup \omega', E \setminus \omega \in T, \end{aligned}$$

Un clan est stable par différence et intersection finie.

**Définition 2.32** (mesure de partie de  $\mathbb{R}^{(n)}$ ). *Soit  $\mu \in \mathbf{Li}[F, \mathbb{R}]^+$ .  $A \subset \mathbb{R}^{(n)}$  est  $\mu$ -able si  $\chi_A \in \bar{F}$ , et alors la mesure  $\mu$  de  $A$  est  $\bar{\mu}[\chi_A]$ .*

Si  $A$  est  $\mu$ -able, alors  $A$  est bornée.

On peut aussi passer d'une mesure de forme sur  $\mathbb{R}^{(n)}$  à une mesure de partie de  $\mathbb{R}^{(n+1)}$  (quoique de manière moins générale). Pour tout  $f \in \bar{F}$ , la mesure de  $\{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{(n+1)}, 0 \leq x_{n+1} \leq f[(x_1 \dots x_n)]\}$  est  $\bar{\mu}[f]$ .

### Théorème 2.36.

$$\forall \mu \in \mathbf{Li}[F, \mathbb{R}]^+, \forall f \in \bar{F}^+, (\mu[\chi_{S[f]}] = 0 \Rightarrow \mu[f] = 0).$$

*Démonstration.* Soit  $f \in \bar{F}^+$ .  $f$  est bornée. Par homogénéité, on se ramène à  $\sup f[\mathbb{R}^n] = 1$ . Donc  $0 \leq f \leq \chi_{S[f]}$ .  $\mu$  est positive, linéaire, croissante,  $0 \leq \mu[f] \leq \mu[\chi_{S[f]}] = 0$ .  $\square$

Soit  $A, B$  des parties  $\mu$ -ables de  $\mathbb{R}^{(n)}$ .  $\chi_A, \chi_B \in \bar{F}$ , qui est un espace vectoriel ordonné,

$$\begin{aligned} \forall A, B \subset E, \chi_{A \cup B} &= \chi_A \vee \chi_B \in \bar{F}, \\ \chi_{A \setminus B} &= \chi_A - \chi_{A \cap B} \in \bar{F}. \end{aligned}$$

$A \cup B, A \setminus B$  sont  $\mu$ -ables. L'ensemble  $T$  des parties  $\mu$ -ables de  $\mathbb{R}^{(n)}$  est un clan.

Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mu[\chi_{A \cap B}] = \mu[0] = 0$ . Si  $\mu[\chi_{A \cap B}] = 0$ , alors

$$\bar{\mu}[\chi_{A \cup B}] = \bar{\mu}[\chi_A] + \bar{\mu}[\chi_B]. \quad (2.32)$$

On dit que la mesure est une fonction additive d'ensemble.

## 2.3 Intégrale

### 2.3.1 Méthode axiomatique

Un principe (ou un postulat, une conjecture, un axiome) est une proposition considérée comme provisoirement vraie. À terme, tout principe doit être critiqué et logiquement reconstruit, c'est-à-dire, converti en définitions ou théorèmes, ou, s'il est mis en défaut, rejeté.

C'est bien ainsi qu'Euclide inaugura la géométrie. Ses principes furent critiqués bien plus tard par Saccheri [26], avant d'être logiquement reconstruits (déf. 1.76), et la critique déboucha sur les géométries non-euclidiennes de Riemann et Lobatchevski. Euclide avait emprunté un raccourci phénoménal.

En mathématiques, depuis le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, sous l'impulsion de Péano, Dedekind... et enfin Bourbaki au XX<sup>e</sup> siècle, on cherche à reconstruire logiquement les principes, d'où un exposé logiquement parfait mais anti-intuitif.

Bien que la reconstruction logique de l'intégrale soit connue depuis Darboux [2], on va l'introduire par principe, non seulement pour éviter des développements techniques, mais surtout pour s'entraîner (avec filet) à la méthode axiomatique, largement utilisée en mécanique pour exprimer des intuitions du monde (d'origine expérimentale ou mentale).

Attention. La méthode axiomatique installe une incomplétude logique qui suspend la prétention atomique initiale.

### 2.3.2 Intégrale de Riemann

$E$  (2.27) contient à la fois les fonctions caractéristiques de parallélépipède (pour  $n = 1$  : les fonctions portes) et les formes continues à support compact. La mesure de parallélépipède induit une fonctionnelle positive croissante de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R} \\ \chi_{P[O,e]} &\mapsto |\det[e]|. \end{aligned}$$

Existe-t-il une forme fonctionnelle linéaire positive  $\mu_R$  sur  $F$  (2.29), prolongeable (thé. 2.26, thé. 2.27) sur un sous-espace vectoriel  $\bar{F}$  de  $E$  contenant les fonctions caractéristiques de parallélépipède, et redonnant leur mesure? Exercice : montrer  $S[\mu_R] = \mathbb{R}^{(n)}$ .

On connaît bien des formes fonctionnelles linéaires positives sur  $F$  : les combinaisons linéaires à coefficients positifs des fonctionnelles de Dirac, mais toutes sont à support borné, au contraire de  $\mu_R$ .

**Principe 2.1.** *Il existe une unique forme fonctionnelle linéaire positive  $\mu_R$  sur  $F$ , dite intégrale de Riemann ou  $R$ -intégrale,*

$$\mu_R = \left( \int f = \int f[x]dx \in \mathbb{R}, f \in F \right),$$

telle que pour toute base  $e$  de  $\mathbb{R}^{(n)}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^{(n)}$ , avec (déf. 2.24),

$$\chi_{P[x,e]} \in \bar{F}, \quad \bar{\mu}_R[\chi_{P[x,e]}] = |\det[e]|.$$

**Définition 2.33.** *Une forme  $f$  sur  $\mathbb{R}^{(n)}$  est localement  $R$ -intégrable si pour, tout parallélépipède  $P$ ,  $\chi_P f$  est  $\mu_R$ -able,  $f \in \bar{F}_{loc}$ ,  $\int_P f = \int \chi_P f$ .*

Soit

$$G = \mathbf{AC}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]. \quad (2.33)$$

$\bar{F}$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels ordonnés de  $\bar{F}_{loc}$ , lui-même un sous-espace vectoriel ordonné de  $E$ .

**Principe 2.2.** *Chaque élément de  $\tilde{F}$  est un singleton,*

$$\forall f, g \in F, (f \sim g \Rightarrow f = g).$$

Par (pri. 2.1), tout parallélépipède de  $\mathbb{R}^{(n)}$  est  $\mu_R$ -able (déf. 2.32) et sa mesure  $\mu_R$  coïncide avec celle prévue par (déf. 1.90). Soit  $A$  une partie  $\mu_R$ -able de  $\mathbb{R}^{(n)}$  : pour  $n = 1, 2, 3$ , au lieu de mesure de  $A$ , on dit longueur, aire, ou volume de  $A$ .

Toute partie finie de  $\mathbb{R}^{(n)}$  est  $\mu_R$ -able et de mesure nulle (déf. 2.32).

**Définition 2.34.** Soit  $\sim$  la relation d'équivalence « a la même  $R$ -intégrale sur tout parallélépipède » dans  $\bar{F}_{loc}$ . Pour tout  $f \in \bar{F}_{loc}$ , soit  $\tilde{f}$ , «  $f$  presque partout », la classe d'équivalence de  $f$ , modulo  $\sim$ .

$$\forall f \in \bar{F}^+, \left( \int f = 0 \Rightarrow f \sim 0 \right).$$

(thé. 2.27) s'applique.

Deux formes localement  $R$ -intégrables qui ne diffèrent que sur une partie de  $\mathbb{R}^{(n)}$  dont l'intersection avec tout parallélépipède est de mesure nulle sont égales presque partout (déf. 2.34, thé. 2.36).

Un sous-ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$  serait-il de mesure nulle ? Comme  $\mathbb{Q}$  n'est pas  $\mu_R$ -able, simplement parce qu'il est non borné, on étudie plutôt  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .  $\chi_A$  admet pour intégrales de Riemann inférieure et supérieure (déf. 2.23)  $\mu_{R,1}[\chi_A] = 0 < \mu_{R,2}[\chi_A] = 1$  donc n'est pas  $\mu_R$ -able.

(pri. 2.1) permet le passage, en sens inverse de (déf. 2.32), d'une mesure de partie à une mesure de forme.

### L'intégrale est-elle une mesure ?

L'intégrale d'une forme continue à support compact, de norme uniforme 1, majorant la fonction caractéristique d'un parallélépipède arbitrairement grand, est sans borne.  $\mu_R$ , restreinte à  $F$ , n'est pas continue pour la norme uniforme donc n'est pas une mesure (déf. 2.27). Cependant,  $\mu_R$  induit une mesure, dite mesure intégrale, sur tout compact  $\mu_R$ -able (déf. 2.28),  $(\int f, f \in \mathbf{AC}[K, \mathbb{R}])$ .

Par linéarité de l'intégrale, la loi  $+$  de  $\bar{F}_{loc}$  et toute homothétie sur  $\bar{F}_{loc}$  sont compatibles avec  $\sim$ .  $\tilde{\bar{F}}_{loc}$  est un espace vectoriel ordonné,  $\tilde{\bar{F}}_{loc}^+ = \widetilde{\bar{F}_{loc}^+}$ , et  $\tilde{\bar{F}}, \tilde{G}$  en sont des sous-espaces vectoriels ordonnés (thé. 2.2, thé. 1.8).  $\tilde{\bar{F}}$  est un sous-espace vectoriel ordonné de  $\tilde{\bar{F}}$ .  $\mu_R$  est compatible avec  $\sim$  restreinte à  $\bar{F}$ . On réutilise (par économie) le symbole  $\int$  pour l'intégrale quotient.

$$\begin{aligned} \forall f \in \tilde{\bar{F}}_{loc}, (f = 0 &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{P}_n, \int_P f = 0), \\ (f \geq 0 &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{P}_n, \int_P f \geq 0). \end{aligned}$$

$\tilde{F}$  est un espace vectoriel normé ordonné, pour la norme intégrale

$$\nu_{1,R} = (\|f\|_1 = \int |f| \in \mathbb{R}, f \in \tilde{F}). \quad (2.34)$$

Pourquoi réutilise-t-on  $\|\bullet\|_1$  (2.5) dans (2.22) ?

**Théorème 2.37.** *Toute forme  $\mu_R$ -able est presque partout la limite (au sens de la norme) intégrale d'une  $\tilde{F}$ -suite.*

*Démonstration.*  $\sim$  restreinte à  $\bar{F}$  est une relation d'équivalence, la loi  $+$  de  $\bar{F}$ , toute homothétie sur  $\bar{F}$  et  $\bar{\mu}$  sont compatibles avec  $\sim$ . Soit  $f \in \bar{F}^+$ ,  $\int f = 0$ . Pour tout parallélépipède  $P$ ,  $0 \leq \chi_P f \leq f$  et, comme  $\mu_R$  est croissante,  $\int_P f = 0$ . Donc  $f \sim 0$ . D'après (thé. 2.27),  $\tilde{F}^+$ ,  $\tilde{F}$  sont denses dans  $\tilde{F}^+$ ,  $\tilde{F}$ .  $\square$

De plus, encore d'après (thé. 2.27), l'intégrale quotient  $\tilde{\mu}_R = (\int f \in \mathbb{R}, f \in \tilde{F})$  est une forme linéaire positive, continue, de norme sphérique un et aussi l'unique forme linéaire continue prolongeant  $\tilde{\mu}_R$  sur  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{\mu}_R = \tilde{\mu}_R$ .

**Principe 2.3.** *La convergence en norme intégrale implique la convergence simple (vers la même limite) presque partout.*

D'après (2.30), la limite uniforme d'une  $F$ -suite est une forme continue donc localement  $R$ -intégrable. Soit  $P$  un parallélépipède. D'après (pri. 2.1, thé. 2.37), il existe une  $\tilde{F}$ -suite dont la limite intégrale est  $\chi_P$  presque partout. Si la  $F$ -suite correspondante avait une limite uniforme  $f$ , celle-ci serait continue, et égale presque partout à  $\chi_P$  (pri. 2.3), discontinue, en contradiction avec (pri. 2.2). La norme intégrale, restreinte et appliquée à  $F$  via (pri. 2.2), et la norme uniforme, restreinte à  $F$ , ne sont pas équivalentes.

On poursuit en adaptant (2.21).

**Théorème 2.38.** *Le produit d'une forme localement  $R$ -intégrable  $f \in \bar{F}_{loc}$  et d'une forme continue  $f' \in G$  est localement  $R$ -intégrable,  $f'f \in \bar{F}_{loc}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f' \in F^+$ .  $\phi = (f'f \in E, f \in \bar{F})$  est une application linéaire positive.  $F$  est une sous-algèbre ordonnée de  $E$ ,  $F^+$  est stable pour  $\phi$ ,  $\phi' = (f'f \in F, f \in F)$  est une application linéaire positive. D'après (thé. 2.2),  $\tilde{F}$  est une algèbre ordonnée (isomorphe à  $F$ ) et  $\phi'$  est compatible avec  $\sim$ ,  $\tilde{\phi}'$  est une application linéaire positive.

Soit  $P$  un parallélépipède contenant le support borné de  $f' \in F^+$ .

$$\forall f \in \tilde{F}, \|\tilde{f}'f\|_1 = \int |\tilde{f}'f| \leq \sup_P |f'| \int |f| = \sup_P |f'| \|f\|_1, \\ \tilde{\phi}' \in \mathbf{LiC}[\tilde{F}, \tilde{F}], \|\tilde{\phi}'\| \leq \|f'\|_\infty.$$

$\tilde{\phi}'$  est continue, unicontinue,  $\bar{F}^+$ ,  $\bar{F}$  sont stables pour  $\phi$  (thé. 2.28).

Soit  $f \in \bar{F}_{loc}$  et  $f' \in G$ .  $\forall P \in \mathbb{P}_n$ ,  $\chi_P f \in \bar{F}$ ,  $\exists f'' \in F$ ,  $\chi_P f'' = \chi_P f'$ ,  $\chi_P f'' f = \chi_P f' f \in \bar{F}$ ,  $f' f \in \bar{F}_{loc}$ .  $\square$

Attention : l'algèbre  $\tilde{F}$  n'est pas normée et on ne sait pas si l'espace vectoriel normé  $\tilde{\tilde{F}}$  est une algèbre.

### 2.3.3 Primitive

Ici,  $n = 1$ .

**Définition 2.35.** Soit  $f \in \bar{F}_{loc}$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ . L'intégrale de  $f$  de  $x$  à  $y$  est

$$\int_x^y f = \int_x^y f[t] dt = \text{sg}[x - y] \int_{[x \wedge y, x \vee y]} f.$$

**Théorème 2.39.**

$$\forall f \in \bar{F}_{loc}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \int_x^x f = 0, \int_y^x f = - \int_x^y f, \int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$$

(Chasles).

*Démonstration.* À l'aide de (2.32),

$$\forall (x, y, z \in \mathbb{R}, x < y < z), \chi_{[x,z]} = \chi_{[x,y]} + \chi_{[y,z]} - \chi_{\{y\}}, \int \chi_{\{y\}} = 0.$$

$\square$

Exercice. Montrer que  $x \mapsto \int_0^x f$  est un endomorphisme de loi sur  $(\mathbb{R}, -)$ . À quelle condition sur  $f$  est-ce un automorphisme? Montrer que  $\{\int_0^x f, x \in \mathbb{R}\}$  est un espace affine.

**Théorème 2.40.**  $f \in E$  (2.27) est une primitive (déf. 2.22) de  $g \in G$  (2.33) si et seulement si  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f[y] - f[x] = \int_x^y g$  [18, t. 2, X.7].

Exemples. Soit  $x > 0$ .

$$\frac{d}{dt} \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 1 - \sqrt{x}, \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}, \quad \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}, \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\cos t}{t}\right) = \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t^2}, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos x}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{t^2} dt. \quad (2.37)$$

(2.37) est un cas d'intégration par partie.

**Théorème 2.41.** Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$  et  $\phi$  une forme différentielle d'ordre  $n$  sur  $A$ ,  $\phi \in \mathbf{A}[A, \mathbf{Li}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}]]$  (déf. 2.21). Soit  $B$  un pavé (déf. 1.89) et (2.16)  $f_i \in \mathbf{C}_1[B, \mathbb{R}]$ .  $\phi$  est totale sur  $B$  si et seulement si  $\forall i, j = 1 \dots n$ ,  $\forall x \in B$ ,  $D_j f_i = D_i f_j$ .

*Démonstration.* Condition nécessaire (analyse) : (thé. 2.18). Condition suffisante (synthèse) : construire une primitive  $f$  de  $\phi$  en intégrant successivement les  $f_i$  par rapport à  $x_i$ , le long d'un chemin « en zigzag » suivant les côtés du pavé... Comme les  $f_i$  sont continues (thé. 2.40), les  $f_i$  sont les dérivées partielles de  $f$ . De plus, grâce à (thé. 2.19),  $f$  est différentiable sur  $A$ .  $\square$

**Théorème 2.42.**

$\forall \phi \in \mathbf{C}_1[\mathbb{R}, \mathbb{R}], \forall f \in \mathbf{C}[\mathbb{R}, \mathbb{R}], \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\phi[x]}^{\phi[y]} f = \int_{\phi[x]}^{\phi[y]} f[t] dt = \int_x^y f[\phi[t]] \frac{d}{dt} \phi[t] dt = \int_x^y f \circ \phi D\phi.$$

Si en outre  $\phi$  est monotone, alors, pour tout intervalle  $I$ ,

$$\int_{\phi[I]} f = \int_I f \circ \phi |D\phi|.$$

*Démonstration.* En combinant (2.40, 2.11),

$$\frac{d}{dy} \int_{\phi[x]}^{\phi[y]} f = \frac{d}{dy} g[\phi[y]] = Dg[\phi[y]] D\phi[y] = f \circ \phi[y] D\phi[y],$$

où  $g$  est une primitive de  $f$ . Puis on réintègre avec (2.40) de  $x$  à  $y$ .  $\square$

Soit  $\phi$  bijective. Formellement, en détaillant les bornes, (thé. 2.42) se ramène à remplacer  $t$  par  $\phi[t]$ ,  $d\phi[t]$  par  $D\phi[t]dt$ , puis inverser  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \int_{t=x}^{t=y} f[t] dt &= \int_{\phi[t]=x}^{\phi[t]=y} f[\phi[t]] d\phi[t] = \int_{t=\phi^{-1}[x]}^{t=\phi^{-1}[y]} f[\phi[t]] D\phi[t] dt = \int_{\phi^{-1}[x]}^{\phi^{-1}[y]} f \circ \phi D\phi, \\ &= \int_x^y f = \int_{\phi^{-1}[x]}^{\phi^{-1}[y]} f \circ \phi D\phi. \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_x^y f$ , en fonction de  $(x, y, f)$ , est invariante (déf. 1.29) par

$$(x, y, f) \mapsto (\phi^{-1}[x], \phi^{-1}[y], f \circ \phi D\phi),$$

FIG. 2.2 – La fonction  $\Lambda$  est-elle intégrable ?

l'intégrale  $\int_I f$ , en fonction de  $(I, f)$ , est invariante (déf. 1.29) par

$$(I, f) \mapsto (\phi^{-1} \circ [I], f \circ \phi |D\phi|).$$

Intégrales impropres :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2, \quad (2.38)$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1. \quad (2.39)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{t} dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt. \quad (2.40)$$

Les propriétés de l'intégrale ne s'étendent pas sans peine à une intégrale impropre. En effet, on ne sait pas déjà pas définir en général une intégrale impropre : on se contente d'une étude de cas.

En combinant (2.38, 2.36Imp), soit

$$\Lambda[x > 1] = x^{-2}, \quad \Lambda[x \leq 1] = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \Lambda[x < 0] = \Lambda[-x], \quad \Lambda \in \mathbf{F}[\mathbb{R}, \mathbb{R}].$$

$\Lambda$  est paire, continue, involutive mais non bornée et à support non compact. Même prolongée en zéro,  $\Lambda$  n'est pas  $\mu_R$ -able. Cependant, intuitivement, l'intégrale de  $\Lambda$ , aire entre son graphe (fig. 2.2) et l'axe des abscisses, calculée par découpage et symétrie, vaut deux carrés plus quatre queues de  $1/x^2$ , soit  $2 + 4 = 6$ .

La fonction sinus cardinal  $t \mapsto \sin t/t$  n'est pas  $\mu_R$ -able, parce qu'elle n'est pas à support compact, mais (2.40) permet de lui attribuer une intégrale impropre, même si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \int \frac{|\sin t/t|}{t} dt = \infty$ .

### 2.3.4 Intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue vise à résoudre des difficultés techniques et (psycho)logiques soulevées par l'intégrale de Riemann, en relation avec l'intuition de mesure.

**Définition 2.36** (tribu). Une tribu d'un ensemble  $E$  est un ensemble  $T$  de parties de  $E$ , tel que

$$\begin{aligned} \emptyset, E &\in T, \\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \forall (\omega_i \in T, i = 1 \dots n), \bigcup_{i=1}^n \omega_i &\in T, \\ \forall \omega \in T, E \setminus \omega &\in T. \end{aligned}$$

Une tribu est stable par différence et intersection finie ou dénombrable. Une tribu est un clan qui tolère l'union dénombrable.

**Théorème 2.43** (de Fubini).

**Théorème 2.44** (changement de variable). Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n)}$ ,  $\phi \in \mathbf{C}_1[A, \mathbb{R}^{(n)}]$ ,  $B \subset A$  tel que  $(\phi[x] \in \phi[B], x \in B)$  soit une bijection.

$$\forall f \in \mathbf{A}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}], (\exists \int_{\phi[B]} f \Leftrightarrow \exists \int_B f \circ \phi |D\phi|),$$

et, si  $\int_{\phi[B]} f$  existe, alors

$$\int_{\phi[B]} f = \int_B f \circ \phi |D\phi|.$$

[21, pro. 26], [18, t. 4, V.5].

Exercice : pour  $n = 1$ , comparer (thé. 2.44) et (thé. 2.42).

**Définition 2.37.** La mesure régulière sur  $\mathbb{R}^{(n)}$  d'une fonction  $\rho : \mathbb{R}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$  (à variation bornée ou une dérivée) est

$$f \mapsto \int \rho f.$$

On identifie une mesure régulière à une fonction.

Une mesure régulière (comme la mesure de Lebesgue sur laquelle elle s'appuie) s'applique aux fonctions sommables et aux parties de  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Une mesure de Dirac est singulière (non-régulière).

**Définition 2.38.** Intégrale d'un champ.

$$\begin{aligned} \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall (f \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(p)}], f[x] = (f_j[x], j = 1 \dots p), \exists \int f_j), \\ \int f = \left( \int f_j, j = 1 \dots p \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$



**Deuxième partie**  
**Mécanique classique**



# Chapitre 3

## Mécanique newtonienne

### 3.1 Géométrie

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine newtonien sur un espace vectoriel  $E$  (réf. 1.93). Soit  $O, O', O'' \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , soit  $r_M, r'_M, r''_M \in E$  les positions (déf. 1.39) de  $M$  depuis  $O, O', O''$ .

Formule de changement d'origine pour  $r_M$  :

$$r_M = r'_M + \overrightarrow{OO'}. \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Corps

**Définition 3.1** (corps). *Un corps  $M$  de  $\mathcal{E}$ , paramétré par un ensemble  $P$ , est une application (déf. 1.16) de  $P$  vers  $\mathcal{E}$ ,*

$$M = (M_x \in \mathcal{E}, x \in P).$$

*Il est*

**discret** *si son image  $M_P = \{M_x \in \mathcal{E}, x \in P\}$  est finie,*

**plein** *si la fonction  $M$  est surjective (déf. 1.16),*

**non replié** *si la fonction  $M$  est injective (déf. 1.16).*

Tant qu'il n'y a pas d'autre corps que  $M$ , pour simplifier, on peut noter, pour tout champ  $f$  sur  $\mathcal{E}$ ,  $f_x = f_{M_x}$ , par exemple,  $r_x = r_{M_x}$ .

Deux corps qui ont la même image ne sont pas forcément les mêmes. Soit  $A, B$  deux points distincts. Voici deux corps distincts de même image :

$$\begin{aligned} M &= (A, B), & M_1 &= A, & M_2 &= B, & \{M_1, M_2\} &= \{A, B\}, \\ M' &= (B, A), & M'_1 &= B, & M'_2 &= A, & \{M'_1, M'_2\} &= \{A, B\}. \end{aligned}$$

Voici trois corps distincts  $M, M', M''$  encore de même image  $\{A, B\}$  :

$$\begin{aligned} M &= (M_i, i = 1, 2), & (M_1, M_2) &= (A, B), \\ M' &= (M_i, i = 2, 3), & (M_2, M_3) &= (A, B), \\ M'' &= (M_i, i = 3, 4), & (M_3, M_4) &= (A, B). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces trois corps évoquent les trois phases successives d'un écoulement permanent,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  passant à tour de rôle en  $A, B$ . Quand Héraclite disait : « on ne revoit jamais le même fleuve », il voulait dire : « il ne faut pas confondre un corps avec son image ».

Soit  $M$  un corps. Une expression dépendant de  $M$  est « lagrangienne » en ce qu'elle présente une restriction de  $M$ , « eulérienne » en ce qu'elle présente une partie de l'image de  $M$ . Ainsi,  $(M_x \in \mathcal{E}, x \in P)$  est complètement lagrangienne,  $\{M_x \in \mathcal{E}, x \in P\}$  est complètement eulérienne. Mais une expression peut être en partie lagrangienne et en partie eulérienne.

L'image d'un corps de  $\mathcal{E}$  n'est pas en général un sous-espace affine, mais c'est un sous-espace métrique de  $\mathcal{E}$ .

**Définition 3.2** (corps continu). *Soit  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $P \subset \mathbb{R}^{(n)}$  et  $M \in \mathbf{C}[P, \mathcal{E}]$  un corps. L'ouvert maximal de  $M$  est le plus grand ouvert  $P' \subset P$ , tel que*

$$M' = (M_x \in M_{P'}, x \in P') \in \mathbf{C}_1[P', M_{P'}] \quad (3.3)$$

*et la différentielle  $dM'$  soit de rang  $n$  partout.  $M$  est un corps continu si  $P \subset \bar{P}'$ . Le corps corestreint de  $M$  est  $M'$ .*

Un corps continu est évidemment un corps.

**Définition 3.3** (coupure). *Soit  $M$  un corps continu sur  $P \subset \mathbb{R}^{(n)}$ , d'ouvert maximal  $P'$ . La coupure de  $M$  est le corps*

$$(M_x \in \mathcal{E}, x \in P \setminus P').$$

Attention : la coupure de  $M$  est à la fois une fonction continue et un corps, mais non un corps continu. Remarque : comme  $P' \subset P \subset \bar{P}'$  (déf. 3.2),  $P \setminus P' \subset \partial P$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^{(n)}$ . Quant à l'image d'un corps continu (ou de sa coupure), rien ne permet d'affirmer en général qu'elle soit mesurable de  $\mathcal{E}$ .

### 3.1.2 Corps et système de coordonnées

**Définition 3.4** (base locale). *Soit*

$$M = (M_x \in \mathcal{E}, x = (x_1 \dots x_n) \in P \subset \mathbb{R}^{(n)})$$

*un corps continu d'ouvert maximal  $P'$  et de corps corestreint  $M'$  (3.3) non replié. La base locale de  $M$  en  $O \in M_{P'}$  est*

$$e[O] = (e_i[O], i = 1 \dots n), e_i[O] = \frac{\partial M}{\partial x_i}[x], O = M_x.$$

*Le repère local de  $M$  en  $O$  est  $(O, e[O])$ . Le sous-espace vectoriel tangent à  $M_{P'}$  en  $O$  est le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}.e$  de  $E$ . Sous-espace affine tangent...*

Justification : comme  $M'$  est non replié,

$$\forall O \in M_{P'}, \exists ! x \in P', O = M_x,$$

donc  $e_i[O]$  est bien défini et unique ;  $e[O]$  existe, parce que  $M'$  est de classe  $\mathbf{C}_1$  ;  $e[O]$  est une famille libre de  $E$  à cause de la condition de rang maximal ;  $e[O]$  est une base, non de  $E$ , mais du sous-espace vectoriel tangent à  $M_{P'}$  en  $O$ .

**Définition 3.5** (système de coordonnées). *Suite à (déf. 3.4), soit  $\mathcal{E}'$  un sous-espace affine de dimension  $n$  de  $\mathcal{E}$ .  $M$  est un système de coordonnées de  $\mathcal{E}'$  si  $M_P \subset \mathcal{E}'$ .*

**Théorème 3.1.** *Suite à (déf. 3.4, déf. 3.5),  $M' = (M_x \in M_{P'}, x \in P')$  est un difféomorphisme.*

*Démonstration.*  $M'$  est une bijection différentiable, dont la différentielle est partout de rang égal à la dimension de  $\mathcal{E}'$ . Appliquer (thé. 2.21).  $\square$

Le système des coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormal  $(O, (e_1, e_2, e_3))$  de  $\mathcal{E}$  est le corps continu, en sommant sur les indices répétés,

$$(O + x_i e_i \in \mathcal{E}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{(3)}). \quad (3.4)$$

C'est un corps plein, non replié, sans coupure, partout de base locale  $e$ .

**Définition 3.6** (tenseur cartésien d'un point). *Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine newtonien sur un espace vectoriel  $E$ . Soit  $O \in \mathcal{E}$  et  $e \in E^{(3)}$  une base de  $E$ .  $\text{ten}_{O,e}$  est l'application de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathbb{R}^{(3)}$  qui à tout point associe ses coordonnées cartésiennes dans le repère  $(O, e)$  de  $\mathcal{E}$ .*

Autrement dit,

$$\text{ten}_{O,e} \in \mathbf{F}[\mathbb{R}^{(3)}, \mathcal{E}] \quad (3.5)$$

est l'application réciproque du système des coordonnées cartésiennes dans  $(O, e)$ , ou encore, le système des coordonnées cartésiennes dans  $(O, e)$  est formellement  $\text{ten}_{O,e}^{-1\circ}$ . En synthétisant (3.4, déf. 3.6),

$$\forall M \in \mathcal{E}, M = O + \text{ten}_{O,e}[M].e. \quad (3.6)$$

**Théorème 3.2** (numérisation d'un corps). *Soit un corps continu  $M = (M_x, x \in P \subset \mathbb{R}^{(n)})$ . En sommant sur les indices répétés,*

$$\exists! f = (f_1 \dots f_3) \in \mathbf{C}[P \subset \mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(3)}], \forall x \in P, M_x = O + f_i[x]e_i.$$

*Démonstration.* En comparant précisément avec (3.6), et en composant avec (3.5),

$$\begin{aligned} f[x] &= (f_i[x], i = 1 \dots 3) = \text{ten}_{O,e}[M], \\ f &= \text{ten}_{O,e}[M\bullet] = \text{ten}_{O,e} \circ M, \\ M &\in \mathbf{F}[P \subset \mathbb{R}^{(n)}, \mathcal{E}], \\ f &= (f_1, f_2, f_3) \in \mathbf{F}[P \subset \mathbb{R}^{(n)}, \mathbb{R}^{(3)}]. \end{aligned}$$

□

$M$  est complètement déterminé par trois fonctions à  $n$  variables réelles. Par exemple, si  $M$  est un système de coordonnées d'un plan affine  $\mathcal{E}'$ , alors  $M$  est déterminé par trois fonctions à deux variables réelles.

Soit  $(O, (e_1, e_2, e_3))$  un repère orthonormal direct de  $\mathcal{E}$ . Les coordonnées cylindriques de  $\mathcal{E}$  dans  $e$  sont le corps continu

$$\begin{aligned} M &= (O + f_i[x]e_i \in \mathcal{E}, x \in P), & (3.7) \\ P &= (\mathbb{R}^+, [-\pi, \pi], \mathbb{R}) \\ \forall x = (r, \theta, z) \in P, f[x] &= (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \\ P' &= (]0, \infty[, ] - \pi, \pi[, \mathbb{R}), \bar{P}' = P. & (3.8) \end{aligned}$$

La base locale, orthogonale, se compose d'un vecteur radial, d'un azimutal ou orthoradial, et d'un axial. Exercice : vérifier que  $P'$  est l'ouvert maximal des coordonnées cylindriques.

Voici, en coordonnées cylindriques, un tronc de cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  et de hauteur  $h > 0$  :

$$0 < z < h, \quad 0 < r < z \tan \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (3.9)$$

Coordonnées sphériques... La base locale, orthogonale, se compose d'un vecteur radial, d'un azimutal, et d'un zénital. Attention : le vecteur radial n'est pas le même en coordonnées cylindriques ou sphériques. Quelle est la coupure des coordonnées sphériques ?

Le théorème 3.2 « numérise » un corps continu  $M = (M_x \in \mathcal{E}, x \in P \subset \mathbb{R}^{(n)})$  à l'arrivée. Inversement, on peut « spatialiser »  $M$  au départ, avec un système de coordonnées cartésiennes d'un sous-espace affine  $\mathcal{E}'$  de dimension  $n$ , de repère  $(O, e' = (e'_1 \dots e'_n))$ .

Pour  $x \in P$ , on pose  $x = \text{ten}_{O',e'}[M']$ ,  $M' \in \mathcal{E}'$ .  $M \circ \text{ten}_{O',e'}$  est une application de  $\mathcal{E}'$  vers  $\mathcal{E}$ , et même, si  $M$  est plein et non-replié, une bijection. Plus précisément, si  $M$  est non replié et d'ouvert maximal  $\mathbb{R}^{(3)}$ , alors  $M$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^{(3)}$  vers  $\mathcal{E}$  et  $M \circ \text{ten}_{O',e'}$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}$ . Graphiquement, dans le diagramme suivant, la diagonale descendante suit le corps numérisé  $M \circ \text{ten}_{O,e}$ , et la diagonale montante suit le corps spatialisé  $\text{ten}_{O',e'} \circ M$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{(n)} & \xrightarrow{M} & \mathcal{E} \\ \text{ten}_{O',e'} \uparrow & & \downarrow \text{ten}_{O,e} \\ \mathcal{E}' & & \mathbb{R}^{(3)} \end{array}$$

### 3.1.3 Coordonnées curvilignes

Soit  $M = (M_x, x \in P \subset \mathbb{R}^{(3)})$  un système de coordonnées de  $\mathcal{E}$ , d'ouvert maximal  $P'$ , et l'application base locale de  $M$   $e : M_{P'} \rightarrow E^{(3)}$ . Soit  $O \in M_{P'}$ .  $M$  est différentiable en  $O$ ,

$$\forall dx \in E^{(3)}, \quad dx = e_i[O]dX^i[O]dM_O[dx] = dx^i[O]e_i[O]. \quad (3.10)$$

Formule de changement d'origine :

$$e_j[O'] = e_i[O]\alpha_j^i[O, O']. \quad (3.11)$$

La matrice de passage  $\alpha = (\alpha_j^i, i, j = 1 \dots 3)$  dépend en général de  $O, O'$ , sauf en coordonnées rectilignes (même base locale partout). D'après (1.39)

$$dX^i[O] = \alpha_j^i dX^j[O'],$$

donc  $\alpha$  est la matrice jacobienne d'un difféomorphisme  $X^j[O'] \mapsto X^i[O]$  :

$$\alpha_j^i = \frac{\partial X^i[O]}{\partial X^j[O']}, \quad (3.12)$$

Avec la base locale duale (déf. 1.92) :

$$\forall dx \in E^{(3)}, dx = dX^i[O]e_i[O] = dX_i[O]e^i[O]. \quad (3.13)$$

Exemple :

$$\forall dx \in E^{(3)}, \langle dx, dx \rangle = \langle dX^i e_i, dX_j e^j \rangle = dX^i dX_j \delta[i, j] = dX^i dX_i. \quad (3.14)$$

Relation entre  $dX^i$  et  $dX_i$ ? Pour simplifier, on n'écrit pas l'origine  $O$  (autrement dit, on travaille sur des fonctions à variable  $O$ ). En appliquant  $\langle e_j, \bullet \rangle$  ou  $\langle e^j, \bullet \rangle$  à (3.13), avec (déf. 1.92), et les tenseurs métriques  $g_{i,j}$ ,  $g^{i,j}$ , qui jouent le rôle de « descendeur » et de « ascenseur » d'indice,

$$g_{i,j} = \langle e_j, e_i \rangle, \quad dX_j = g_{i,j} dX^i, \quad (3.15)$$

$$g^{i,j} = \langle e^i, e^j \rangle, \quad dX^j = g^{i,j} dX_i, \quad (3.16)$$

Pour une base orthonormale,  $g_{i,j} = g^{i,j} = \delta[i, j]$ .

### 3.1.4 Bord, contact

Définir le bord de l'image d'un corps ne pose guère de problème (déf. 2.2). Mais qu'est-ce que le bord d'un corps  $M$ ? Ce doit être un corps  $B$ , dont l'image est le bord de l'image de  $M$ . Mais, comme un corps ne se réduit pas à son image, on doit en outre tenter de paramétrer un point du bord de  $M$ , par continuité avec ses voisins de l'intérieur.

**Définition 3.7** (chaîne). *Soit  $P_0$  un espace métrique et  $M = (M_x, x \in P \subset P_0)$  un corps. Soit  $M_0$  un point du bord de l'image de  $M$ , c'est-à-dire (déf. 2.2),  $M_0 \in \partial M_P$ . Une chaîne, reliant  $M_0$  à  $M$ , est un corps infini  $(M_{x_n}, n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $M_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{x_n}$ .*

On peut voir une chaîne comme une fibre matérielle (chaîne d'atomes voisins, macromolécule linéaire...)

Comme  $M_0$  est un point limite de  $M_P$  (déf. 2.2), il existe au moins une chaîne le reliant à  $M$ .

**Définition 3.8** (bord).  *$M_0$  est un point du bord de  $M$  s'il existe un unique  $x_0 \in P_0$  tel que toutes les suites  $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$  de toutes les chaînes convergent vers  $x_0$ .*

Quelle est la traduction mathématique de la propriété demandée aux chaînes? Clairement, il s'agit de continuité réciproque de l'application  $M' = (M_x \in M_P, x \in P)$ , que celle-ci soit inversible ou non. Cependant, pour simplifier, on va examiner le cas où cette application  $M'$  est inversible, autrement dit, le corps  $M$  est non-replié.

**Théorème 3.3.** *Soit  $P_O$  un espace métrique et  $P \subset P_O$  fermé. Soit  $M = (M_x, x \in P)$  un corps, tel que  $M' = (M_x \in M_P, x \in P)$  soit un homéomorphisme. Le bord de  $M$  est la restriction de  $M$  à  $M'^{-1\circ}[\partial M_P]$  et son image est le bord de  $M_P$  (le bord de l'image est l'image du bord).*

*Démonstration.* Si  $P$  est fermé et si l'application  $M' = (M_x \in M_P, x \in P)$  est un homéomorphisme, alors  $M_0 \in M_P$ ,  $M'$  admet une réciproque, continue en  $M_0$ , et, pour toute chaîne reliant  $M_0$  à  $M$ , la suite  $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est non seulement unique, mais surtout convergente vers  $x_0 = (M')^{-1\circ}[M_0]$ .  $\square$

On trouvera dans [16] des exemples de corps non-homéomorphes, pour lesquels le bord de l'image n'est pas l'image du bord (par exemple, une spirale s'enroulant sur un cercle).

Corollaire : un corps discret est son propre bord.

Par exemple, le système de coordonnées cylindriques (corps continu non-replié) n'a pas de bord (au contraire de son image), parce qu'il n'est pas prolongeable par continuité réciproque sur la coupure.

Exercice. Border le (trouver le bord du) carré en coordonnées cartésiennes orthonormales,  $0 < x_1, x_2 < 1$ ,  $x_3 = 0$ , border le corps (3.9).

**Définition 3.9** (section). *La section d'un corps  $M = (M_x, x \in P)$  par  $A \subset \mathcal{E}$  est la restriction  $M'$  de  $M$  aux seuls paramètres qui produisent un point de  $A$  :*

$$M' = (M_x, x \in P'), \quad P' = \{x \in P, M_x \in A\}.$$

Exercice : essayer de définir une union de corps.

**Définition 3.10** (contact). – *Deux corps sont en contact si l'intersection de leurs images est incluse dans l'intersection des images de leurs bords.*

- *Un point de contact entre deux corps en contact est un point qui appartient aux images de leurs bords.*
- *Le corps de contact d'un corps en contact avec un autre est la section de son bord (déf. 3.9) par l'image du bord de l'autre.*

Si l'image de chaque bord a un plan tangent en un point de contact, alors ces plans tangents sont confondus.

Dans les roulements à billes, les corps de contact sont discrets (un ou quelques points). Dans les roulement à rouleaux, les engrenages ou les filetages, les corps de contacts sont linéaires, c'est-à-dire, continus sur une partie

de  $\mathbb{R}$ . Quels sont les avantages et les inconvénients techniques des deux types de roulement ?

Exercice : quel est le contact du corps (3.9) avec un demi-espace (imaginer ce corps posé sur une table) ?

## 3.2 Cinématique

### 3.2.1 Mouvement

Le temps newtonien est un paramètre pris dans un intervalle réel  $[t_1, t_2]$ . Tous les objets peuvent dépendre du temps, même si tous n'en dépendent pas effectivement. Formellement, temporiser  $x$  c'est remplacer  $x$  par  $x[t]$ , où  $t \in [t_1, t_2]$  désigne un instant et  $x$  un objet. En particulier,  $f[x]$  temporisé est  $f[t][x[t]]$ , ou, plus simplement, en aplatissant (1.7),  $f[t, x[t]]$ .

Formellement, la dérivée totale temporelle de  $f[x]$  est la dérivée de  $f[x]$  temporisé aplati, soit

$$\frac{d}{dt}[f[t, x[t]]] = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt}x[t]. \quad (3.17)$$

**Définition 3.11** (élément mobile). *Soit  $M$  un ensemble. Un élément mobile de  $M$  est une application de  $[t_1, t_2]$  vers  $M$ .*

En particulier, un corps mobile de  $\mathcal{E}$  est

$$t \mapsto M[t] = (M_x[t] \in \mathcal{E}, x \in P[t]). \quad (3.18)$$

Il est inutile de temporiser la variable muette  $x$ . On admet que l'espace ne dépend pas du temps (contrairement à la mécanique relativiste). Cependant, l'ensemble de paramètres  $P$  dépend en général du temps.

L'image du corps mobile (3.18) à l'instant  $t$  est

$$\{M_x[t], x \in P[t]\}.$$

L'image historique du corps mobile (3.18) (comme la trace de phares de voiture sur une photographie nocturne en pose longue) est

$$\{M_x[t], x \in P[t], t \in [t_1, t_2]\}.$$

**Définition 3.12** (corps étanche). *Un corps mobile  $t \mapsto (M_x[t], x \in P[t])$  est étanche si  $\forall t \in [t_1, t_2], P[t] = \text{cst}$ .*

Un corps étanche est un corps qui ne perd ni ne gagne jamais aucun point mobile.

Une section de corps mobile étanche par une partie fixe de l'espace ou un corps de contact entre deux corps étanches sont en général des corps non-étanches. Exercice : construire un corps non-étanche d'après (3.2), construire un corps non-étanche en étudiant le contact entre les deux ciseaux d'une paire de ciseaux.

**Définition 3.13** (référentiel). *Le référentiel d'un corps mobile (3.18) étanche toujours non-replié est son image spatiale, c'est-à-dire*

$$\mathcal{R} = \{t \mapsto M_x[t], x \in P\}.$$

*Un corps mobile étanche est inclus dans  $\mathcal{R}$  si son référentiel est inclus dans  $\mathcal{R}$ .*

**Définition 3.14** (point coïncident). *Soit un référentiel  $\mathcal{R}$ . À un instant  $t$ ,  $M_x \in \mathcal{R}$  coïncide avec  $M \in \mathcal{E}$  si  $M_x[t] = M$ .*

On dit aussi :  $M_x$  est le point coïncident de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  ou encore  $M_x$  est le point de  $\mathcal{R}$  coïncidant avec  $M$ . Deux points mobiles sont égaux si et seulement si chacun coïncide toujours avec l'image de l'autre.

**Définition 3.15** (flot). *Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel (déf. 3.13). Soit  $t, t' \in [t_1, t_2]$ . Le flot de  $\mathcal{R}$  depuis  $t$  jusqu'à  $t'$  est*

$$\begin{aligned} \Phi[t, t'] &= \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M = M_x[t] &\mapsto M_x[t']. \end{aligned}$$

D'après (déf. 3.13),  $\Phi[t, t']$  est une fonction, et une fonction injective. Si en outre  $\mathcal{R}$  est plein à l'instant  $t$ , alors  $\Phi[t, t']$  est une application injective, et

$$\begin{aligned} \Phi[t, t] &= \text{Id}_{\mathcal{E}}, \\ \forall t, t', t'' \in [t_1, t_2], \Phi[t, t''] &= \Phi[t', t''] \circ \Phi[t, t']. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Bijection  $\mathcal{R} \mapsto \Phi$  :  $\Phi$  détermine complètement  $\mathcal{R}$ .

**Définition 3.16** (vitesse, accélération). *Soit  $O \in \mathcal{E}$ . La vitesse et l'accélération d'un point mobile  $M$  de  $\mathcal{E}$  sont (si elles existent)*

$$v_M[t] = \frac{d}{dt}M[t], \quad \gamma_M[t] = \frac{d}{dt}v_M[t].$$

Les fonctions vitesse et accélération sur  $[t_1, t_2]$  sont donc

$$v_M = DM, \quad \gamma_M = Dv_M,$$

où  $D$  est l'opérateur linéaire de dérivation.

**Définition 3.17** (mouvement). *Le mouvement d'un corps mobile étanche ( $t \mapsto M_x[t]$ ,  $x \in P$ ) est la fonction*

$$t \mapsto ((r_x, v_x)[t], x \in P).$$

(En simplifiant  $r_{M_x} = r_x$  etc.) La phase du mouvement à l'instant  $t$  est  $((r_x, v_x)[t], x \in P)$ .

**Définition 3.18** (champ de vitesse). *Le champ de vitesse d'un référentiel  $\mathcal{R}$  est le champ (déf. 1.46) mobile  $t \mapsto v_e[t]$  dont le moment en  $M$  à un instant  $t$  est la vitesse du point coïncident (s'il existe)  $M_x[t]$  de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  :*

$$v_{e,M}[t] = v_x[t], \quad M = M_x[t].$$

Le champ de vitesse (eulérien) s'exprime en fonction du flot (lagrangien) :

$$v_e[t] = \partial_2 \Phi[t, t]. \quad (3.20)$$

À l'inverse de (3.20), peut-on retrouver le flot à partir du champ de vitesse? Pour tout  $O \in \mathcal{E}$ , on cherche un point mobile  $O' = \Phi[t, \bullet][O]$  de  $\mathcal{E}$  tel que

$$O'[t] = O, \quad \forall t', \quad v_{O'}[t'] = \frac{d}{dt'} O'[t'] = v_{e,O'[t']}[t']. \quad (3.21)$$

C'est une équation différentielle (thé. 2.22). Si

$$((t, M) \mapsto v_{e,M}[t]) \in \mathbf{C}_1[[t_1, t_2], \mathcal{E}], E], \quad (3.22)$$

alors il existe, sur un intervalle ouvert contenant  $t$ , une solution unique  $O'$ . Exercice : montrer que  $O'$  est deux fois continûment dérivable et calculer son accélération avec (3.17).

Bijection

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2[[t_1, t_2], \mathcal{E}], E] &\rightarrow \mathbf{C}_1[[t_1, t_2], \mathcal{E}], E] \\ \Phi &\mapsto \vec{v}_{e,M}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.2.2 Constante du mouvement, dérivée lagrangienne

**Définition 3.19** (stationnaire, uniforme). *Une fonction  $f$  à deux variables de temps-espace  $t, M$  est*

**stationnaire** si  $f[\bullet, M]$  est constante pour tout  $M$  où elle est définie,

**uniforme** si  $f[t, \bullet]$  est constante pour tout  $t$  où elle est définie.

**Définition 3.20** (constante du mouvement). *Une fonction  $f$  de temps-espace est une « constante du mouvement » d'un référentiel  $\mathcal{R}$  plein à un instant  $t$  et de flot  $\Phi$  si*

$$t' \mapsto f[t', \Phi[t, t']][M] = \text{cst.}$$

Plus précisément, (3.19) donne la constante,  $f[t', \Phi[t, t']][M] = f[t, M]$ .

Si  $\mathcal{R}$  est toujours plein, alors  $\Phi[t, t']$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  vers lui-même, qui peut servir à transformer  $f[t, \bullet]$  :

$$M' = \Phi[t, \bullet][M] \in \mathcal{R}, \quad f'[t, M'] = f[t, M'[t]].$$

Même si  $f$  est indépendante du temps,  $f'$  ne l'est pas en général. Par exemple, l'effet Doppler est une variation de fréquence d'une onde (acoustique, optique...) en fonction du référentiel. Quelle est la fréquence de la houle pour un navire surfant ? Peut-on annuler la fréquence de la lumière ?

**Définition 3.21** (dérivée particulière). *La dérivée particulière dans un référentiel  $\mathcal{R}$  d'une fonction mobile  $f$  sur  $\mathcal{E}$ , à un instant  $t$ , en un point  $M \in \mathcal{E}$ , est*

$$\frac{Df}{Dt}(M) = \partial_1 f'(t, M'), \quad M' \in \mathcal{R}', \quad M'[t] = M.$$

(Lagrange.)

Si  $f$  est différentiable et si  $M' \in \mathcal{R}'$  est dérivable en tant que point mobile de  $\mathcal{E}$ , alors  $f'$  (3.2.2) est différentiable (3.17) et

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{E}, \quad \frac{Df}{Dt}(M) &= \frac{d}{dt} f(t, M'[t]) \\ &= \partial_1 f(t, M'[t]) + df(t, \bullet)_{M'[t]} \left( \frac{d}{dt} M'[t] \right) \\ &= \partial_1 f(t, M'[t]) + \vec{\nabla} f(t, M'[t]) \cdot \vec{v}_{M'}[t] \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(M) + \vec{v}_{e, M}[t] \cdot \vec{\nabla} f(t, M), \\ \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla} f[t], \\ \frac{Df}{D\bullet} &= \partial_1 f + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla} f. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Solide

**Définition 3.22** (solide). *Un référentiel  $\mathcal{R}$  est solide si*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \forall O, M \in \mathcal{R}, r[t] = \text{cst.} \quad (3.24)$$

*Un corps mobile étanche est solide si son référentiel est solide. Un solide est un corps mobile étanche solide.*

Toute partie d'un référentiel solide est un référentiel solide. Toute restriction d'un solide est un solide.

**Théorème 3.4.** *Un référentiel solide plein à  $t_0$  est toujours plein. Le flot depuis un instant  $t_0$  d'un référentiel solide plein est une isométrie mobile.*

*Démonstration.* Soit un tel référentiel, de flot  $\Phi$ . Par (déf. 3.22), pour tout instant  $t$ ,  $\Phi(t, \bullet)$  est une isométrie, laissant  $\mathcal{E}$  globalement invariant. Donc ce référentiel est plein aussi à l'instant  $t$ .  $\square$

Voici un référentiel solide plein :

$$\{t \mapsto M, M \in \mathcal{E}\}, \forall t, \Phi[t] = \text{Id}_{\mathcal{E}}, \vec{v}_e = 0.$$

**Théorème 3.5** (du torseur cinématique). *Soit un référentiel solide plein*

$$\mathcal{R} = \{M_{\bullet}\}, \forall i, M_i \in \mathbf{C}_1([t_1, t_2], \mathcal{E}).$$

- *Son flot instantané est un déplacement,*
- *son incrément instantané de vitesse est opérateur linéaire antisymétrique et*
- *son champ de vitesse est un torseur mobile.*

*Démonstration.* Il existe quatre points mobiles de  $\mathcal{E}$ , appartenant à  $\mathcal{R}$  et non-coplanaires à un instant  $t_0$ . Au moins un des quatre serait déplacé d'une distance finie par un retournement  $\Phi(t, \bullet)$ , même pour  $t \rightarrow t_0$ , ce qui contredit la continuité des points mobiles. Donc  $\Phi(t, \bullet)$  n'est pas un retournement, mais un déplacement.

Pour tout vecteur mobile  $x$ , on pose

$$\delta x = x[t] - x(t_0).$$

Soit  $O, M, N \in \mathcal{R}$ . La partie linéaire (déf. 1.50)  $\text{Li}[\Phi](t, \bullet)$  du déplacement  $\Phi(t, \bullet)$  est telle que

$$\begin{aligned} \forall t, \text{Li}[\Phi](t, \vec{r}_M) &= \vec{r}_M(t_0) + \delta \vec{r}_M, \\ \partial_1 \text{Li}[\Phi](t_0, \vec{r}_M) &= DM(t_0) = (\vec{v}_M - \vec{v}_O)(t_0). \end{aligned}$$

Comme  $\text{Li}[\Phi][t]$ ,  $\partial_1 \text{Li}[\Phi](t_0, \bullet)$  est encore un opérateur linéaire (thé. 2.31), identique à l'incrément de vitesse à  $t_0$ ,

$$E \rightarrow E$$

$$\vec{r} = \vec{r}_M(t_0), M \in \mathcal{R} \mapsto (\vec{v}_M - \vec{v}_O)(t_0).$$

De plus, on va voir que l'incrément de vitesse est un opérateur linéaire antisymétrique (déf. 1.79).  $\Phi(t, \bullet)$  est un isométrie, donc  $\text{Li}[\Phi](t, \bullet)$  est une application orthogonale. Par invariance de la forme scalaire,

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{r}_M(t_0) + \delta\vec{r}_M) \cdot (\vec{r}_N(t_0) + \delta\vec{r}_N) - (\vec{r}_M \cdot \vec{r}_N)(t_0) \\ &= \vec{r}_M(t_0) \cdot \delta\vec{r}_N + \vec{r}_N(t_0) \cdot \delta\vec{r}_M + \delta\vec{r}_M \cdot \delta\vec{r}_N, \\ 0 &= (\vec{r}_M \cdot DN + \vec{r}_N \cdot DM)(t_0) \\ &= (\vec{r}_M \cdot (\vec{v}_N - \vec{v}_O) + \vec{r}_N \cdot (\vec{v}_M - \vec{v}_O))(t_0). \end{aligned}$$

Donc le champ de vitesse à l'instant  $t_0$  est un torseur (déf. 1.80).  $\square$

**Définition 3.23** (torseur cinématique, vitesse angulaire). *Le torseur cinématique d'un solide plein est son champ de vitesse (un torseur mobile). La vitesse angulaire (instantanée) d'un solide est la résultante (déf. 1.94) de son torseur cinématique (instantané).*

Le théorème 1.32 fournit une caractérisation pratique du torseur cinématique  $\vec{v}_e$  d'un solide, à l'aide de sa résultante  $\vec{\omega} : [t_1, t_2] \rightarrow E$  :

$$\forall O, M \in \mathcal{E}, \vec{v}_{e,M} = \vec{v}_{e,O} + \vec{\omega} \times \vec{r}_M. \quad (3.25)$$

### 3.2.4 Référentiel-espace, invariance cinématique

On poursuit dans le cas solide, toujours avec (3.22), la recherche (3.21) du flot  $\Phi$  depuis un instant  $t_0$  d'un référentiel  $\mathcal{R}$  plein à  $t_0$ , de torseur cinématique  $\vec{v}_e$  (thé. 3.5, 3.25). Il existe une solution  $O'$  sur  $[t'_1, t'_2] \ni t_0$ ; quitte à restreindre l'intervalle  $[t_1, t_2]$  à  $[t'_1, t'_2]$ , on la suppose définie sur  $[t_1, t_2]$  et on en fait le premier point de  $\mathcal{R}$ .

Puis on cherche les points mobiles  $M'$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant (3.25), d'où l'équation différentielle sur  $\vec{r}_{M'}$

$$\forall t \in [t_1, t_2], \frac{d}{dt} \vec{r}_{M'}[t] = \vec{v}_{O'}[t] + \vec{\omega}[t] \times \vec{r}'_{M'}[t],$$

qui se réduit en une équation différentielle *linéaire*,

$$\forall t \in [t_1, t_2], \frac{d}{dt} \vec{r}'_{M'}[t] = \vec{\omega}[t] \times \vec{r}'_{M'}[t].$$

On dispose alors des résultats de la théorie des équations différentielles linéaires. L'ensemble des solutions de (3.2.4) est un espace vectoriel,

$$E' = \{\vec{r}' \in \mathbf{C}_2([t_1, t_2], E), D\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'\}, \quad (3.26)$$

et, d'après le thé. 2.22 (cas des équations linéaires),

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ \vec{r}' &\mapsto \vec{r}'(t_0). \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

En outre,

$$\forall \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \in E', D(\vec{r}'_1 \cdot \vec{r}'_2) = \det(\vec{\omega}, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) + \det(\vec{r}'_1, \vec{\omega}, \vec{r}'_2) = 0.$$

$E'$  est encore un espace vectoriel *euclidien* de dimension trois, pour la forme scalaire (indépendante de  $t_0$ )

$$\begin{aligned} E' \times E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{r}'_1, \vec{r}'_2) &\mapsto (\vec{r}'_1 \cdot \vec{r}'_2)(t_0), \quad t_0 \in [t_1, t_2], \end{aligned}$$

L'ensemble des  $M'$  solution de l'équation « avec second membre » (3.2.4) est la somme d'une solution particulière ( $O'$ ) est de la solution générale de l'équation « sans second membre » (3.2.4) :

$$\mathcal{R} = O' + E' = \mathcal{E}'.$$

Donc  $\mathcal{R}$  est un espace affine euclidien sur l'espace vectoriel  $E'$ . Exercice : vérifier directement à l'aide de (déf. 3.22) que  $\mathcal{E}'$  est un solide plein.

**Définition 3.24** (référentiel-espace). *Un référentiel-espace de  $\mathcal{E}$  est un référentiel solide plein de torseur cinématique  $\mathbf{C}_1$  (3.22).*

**Théorème 3.6** (invariance cinématique). *Tout référentiel-espace est aussi un espace affine euclidien de dimension trois, qui peut supporter sa propre géométrie et sa propre cinématique.*

Attention : un point de  $\mathcal{E}'$  (ou un vecteur de  $E'$ ) est aussi un point mobile de  $\mathcal{E}$  (ou un vecteur mobile de  $E$ ).

Digression : un référentiel peut être toujours plein sans être solide. Quelle sorte d'espace obtient-on alors ?

**Théorème 3.7.** *Soit un point mobile  $M$  de  $\mathcal{E}$  et un référentiel-espace  $\mathcal{E}'$ , de repère  $(O'; \vec{e}'_i)$ .  $M \in \mathcal{E}'$  si et seulement si ses coordonnées dans le repère mobile  $(O'; \vec{e}'_i)[t]$  de  $\mathcal{E}$  sont constantes.*

Pour plus de précision, le torseur cinématique d'un référentiel-espace  $\mathcal{E}'$  dans un référentiel-espace  $\mathcal{E}$  sera noté  $\vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ , et sa résultante  $\vec{\omega}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ .

**Théorème 3.8** (espace affine des référentiels-espaces). *On pose, pour tout torseur mobile  $\vec{v}$ , et pour tous référentiels-espaces  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ ,*

$$\vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}' + \vec{v}) = \vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}') + \vec{v}.$$

*Cela induit une loi externe sur l'ensemble des référentiels-espaces, et en fait un espace affine sur l'espace vectoriel des torseurs mobiles. Corollaire :*

$$\vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}'') = \vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}') + \vec{v}_e(\mathcal{E}', \mathcal{E}''), \quad (3.27)$$

$$\vec{\omega}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'') = \vec{\omega}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') + \vec{\omega}(\mathcal{E}', \mathcal{E}''). \quad (3.28)$$

*Démonstration.* Vérifier (déf. 1.38) (3.27) est la classique relation de Chasles, à laquelle on applique la réduction des torseurs pour obtenir (3.28).  $\square$

### 3.2.5 Solide non-dégénéré

**Définition 3.25.** *Un solide est non-dégénéré s'il est prolongeable en un unique solide plein.*

Un solide est non-dégénéré si et seulement si il est inclus dans un unique référentiel-espace. Un solide plein est évidemment non-dégénéré.

**Théorème 3.9.** *Un solide possédant au moins quatre points mobiles non coplanaires est non-dégénéré.*

*Démonstration.* Soit un référentiel de flot  $\Phi$ , contenant un tel solide. Les vitesses de quatre tels points déterminent, à tout instant  $t$ , par l'image d'une base, un unique opérateur linéaire antisymétrique  $\partial_1 \text{Li}[\Phi](t, \bullet)$  (l'incrément de vitesse), donc une unique vitesse angulaire  $\vec{\omega}[t]$  (thé. 1.31).  $\square$

Le concept de référentiel-espace (thé. 3.6, thé.3.7) facilite la caractérisation des solides non-dégénérés.

**Théorème 3.10.** *Un solide est dégénéré si et seulement si son image est portée par une droite.*

*Démonstration.* Dans le sens réciproque ( $\Leftarrow$ ) : la vitesse angulaire d'un solide porté par une droite est indéterminée dans la direction de cette droite. Un solide porté par une droite est donc dégénéré.

Dans le sens direct : on va montrer la contraposée, c'est-à-dire qu'un solide composé d'au moins trois points mobiles  $O', M'_1, M'_2$  non-alignés est non-dégénéré.

Soit un solide plein de référentiel-espace  $\mathcal{E}' \supset \{O', M'_1, M'_2\}$ . Par multiplication vectorielle dans l'espace vectoriel newtonien  $E'$ , on construit

$$M'_3 \in \mathcal{E}', \quad \vec{r}'_3 = \vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1.$$

$(O', M'_1, M'_2, M'_3)$  est un solide non-dégénéré, déterminant de manière unique son référentiel, qui est encore  $\mathcal{E}'$ .  $\square$

Un solide composé de trois points mobiles non-alignés est nécessaire et suffisant pour déterminer un référentiel-espace.

**Théorème 3.11.** *Le référentiel-espace  $\mathcal{E}'$  d'un solide composé de trois points mobiles  $(O', M'_1, M'_2)$  non-alignés est l'ensemble des points mobiles de  $\mathcal{E}$  qui restent à distance constante de  $(O', M'_1, M'_2)$ .*

*Démonstration.* On construit  $M'_3 \in \mathcal{E}'$  par multiplication vectorielle, d'où un repère  $(O'; \vec{r}'_i)$  de  $\mathcal{E}'$ , qui peut servir à (thé. 3.7). D'une part, en calculant les distances dans ce repère, on trouve  $MM'_i[t] = \text{cst}$ . On a donc l'inclusion dans le sens direct ( $\subset$ ).

Réciproquement, soit un point mobile  $M$  de  $\mathcal{E}$ , tel que  $MM'_i[t] = \text{cst}$ . Comme  $(O', M'_1, M'_2, M'_3, M)$  est un solide non-dégénéré, inclus dans un unique référentiel-espace  $\mathcal{E}''$ , de même  $(O', M'_1, M'_2, M'_3)$  est un solide non-dégénéré inclus dans  $\mathcal{E}''$ . Mais  $(O', M'_1, M'_2, M'_3)$  est déjà inclus dans  $\mathcal{E}'$ . Donc  $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'$ .  $\square$

Remarque : le théorème 3.11, comme la définition 3.22, n'utilise que des distances, invariantes par changement de référentiel-espace.

Exercices. L'inclusion dans un même référentiel-espace est-elle une relation d'équivalence entre solides ? Combien de points sont à distance donnée de trois autres non-alignés ? Pourquoi un point mobile à distance constante de trois autres composant un solide appartient-il à leur référentiel-espace ?

### 3.2.6 Composition des vitesses et des accélérations

Soit un référentiel-espace  $\mathcal{E}'$  de flot  $\Phi$  et de vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . Un point de  $\mathcal{E}'$  est

$$\Phi(\bullet, M), \quad M \in \mathcal{E}.$$

Un point *mobile* de  $\mathcal{E}'$  est

$$t \mapsto M'[t] = \Phi(\bullet, M[t]), \quad M[t] \in \mathcal{E}. \quad (3.29)$$

$M'$  est une fonction de *deux* temps indépendants :

$$\forall t, \tau \in [t_1, t_2], \quad M'(t, \tau) = \Phi(\tau, M[t]).$$

La vitesse et l'accélération de  $M' \in \mathcal{E}'$  à l'instant  $t$  sont (déf. 3.16)

$$\vec{v}_{M'}[t] = \partial_1 M'(t, \bullet), \quad \vec{\gamma}_{M'}[t] = \partial_{1,1} M'(t, \bullet). \quad (3.30)$$

Ce sont des vecteurs de  $E'$  donc des vecteurs mobiles de  $E$ .

**Définition 3.26** (vitesse relative). *La vitesse et l'accélération relatives de  $M'$  à l'instant  $t$  dans  $\mathcal{E}'$  sont*

$$\vec{v}_{r,M'}[t] = \vec{v}_{M'}(t, t), \quad \vec{\gamma}_{r,M'}[t] = \vec{\gamma}_{M'}(t, t). \quad (3.31)$$

Ce sont des vecteurs de  $E$ .

**Définition 3.27** (image absolue). *L'image absolue de  $M'$  dans  $\mathcal{E}$  est le point mobile  $M'_a$  de  $\mathcal{E}$ , tel que*

$$M'_a[t] = M'(t, t).$$

*La vitesse ou l'accélération absolue de  $M'$  dans  $\mathcal{E}$  est la vitesse ou l'accélération de son image absolue dans  $\mathcal{E}$ .*

**Définition 3.28.** *Le point coïncident d'un point mobile  $M'$  de  $\mathcal{E}'$  à un instant  $t$  dans  $\mathcal{E}'$  est  $M'_e \in \mathcal{E}'$  coïncidant avec  $M'_a[t]$  :*

$$M'_e[t] = M'_a[t].$$

Donc

$$M'_e[t] = M'(t, t), \quad M'_e = M'(t, \bullet) = \Phi(\bullet, M[t]).$$

La vitesse de  $M'_e$  en tant que point mobile de  $\mathcal{E}$  est

$$\vec{v}_{e,M'(t,t)}[t] = \vec{v}_{e,M'}[t].$$

**Théorème 3.12** (composition des vitesses). *La vitesse de l'image absolue dans  $\mathcal{E}$  d'un point mobile  $M'$  de  $\mathcal{E}'$  égale sa vitesse relative dans  $\mathcal{E}'$  plus la vitesse de son point coïncident dans  $\mathcal{E}'$  :*

$$\vec{v}_{a,M'} = \vec{v}_{r,M'} + \vec{v}_{e,M'}.$$

*Démonstration.* On calcule, à l'aide de (3.17, déf. 3.26, 3.30, 3.29, 3.20) :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{a,M'}[t] &= \frac{d}{dt}M'(t, t) = \partial_1 M'(t, t) + \partial_2 M'(t, t), & (3.32) \\ \partial_1 M'(t, t) &= \vec{v}_{M'}(t, t) = \vec{v}_{r,M'}[t], \\ \partial_2 M'(t, t) &= \partial_1 \Phi(t, M[t]) = \vec{v}_{e,M'}[t].\end{aligned}$$

□

Exercice. Retrouver (thé. 3.12) à l'aide de  $O \in \mathcal{E}$  et des coordonnées de  $M'$  dans un repère  $(O'; \vec{e}'_i)$  de  $\mathcal{E}'$ .

Avec des notations plus explicites :

$$\vec{v}_{M'}(\mathcal{E}) = \vec{v}_{a,M'}, \quad \vec{v}_{M'}(\mathcal{E}') = \vec{v}_{r,M'},$$

(thé. 3.12) donne

$$\vec{v}_{e,M'}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \vec{v}_{M'}(\mathcal{E}) - \vec{v}_{M'}(\mathcal{E}'). \quad (3.33)$$

Par comparaison avec (thé. 3.27), on trouve que la vitesse se compose à l'opposé de la vitesse d'entraînement (en effet, la somme des deux est la vitesse absolue).

**Définition 3.29.** *L'accélération de Coriolis dans  $\mathcal{E}$  d'un point mobile  $M'$  de  $\mathcal{E}'$  est*

$$\vec{\gamma}_{c,M'} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{r,M'}.$$

(Coriolis.)

**Théorème 3.13** (composition des accélérations). *L'accélération de l'image absolue dans  $\mathcal{E}$  d'un point mobile  $M'$  de  $\mathcal{E}'$  égale son accélération relative dans  $\mathcal{E}'$  plus son accélération de Coriolis dans  $\mathcal{E}$ , plus l'accélération de son point coïncident dans  $\mathcal{E}'$  :*

$$\vec{\gamma}_{a,M'} = \vec{\gamma}_{r,M'} + \vec{\gamma}_{c,M'} + \vec{\gamma}_{M'_e}.$$

*Démonstration.* On dérive (3.32) :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{a,M'}[t] &= \frac{d}{dt}(\partial_1 M'(t, t) + \partial_2 M'(t, t)) = (\partial_{1,1} + 2\partial_{1,2} + \partial_{2,2})M'(t, t). \\ \partial_{1,1}M'(t, t) &= \vec{\gamma}_{M'}(t, t) = \vec{\gamma}_{r,M'}[t], \\ \partial_{2,2}M'(t, t) &= \partial_{1,1}\Phi(t, M[t]) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{e,M'}[t]) = \vec{\gamma}_{M'_e}[t].\end{aligned}$$

On calcule la dérivée croisée :

$$\begin{aligned}
 \partial_{1,2}M'(t, \bullet) &= D\partial_t\Phi(\bullet, M[t]), \\
 \Phi(\bullet, M[t]) \in \mathcal{E}, & \quad \partial_t\Phi(\bullet, M[t]) \in E. \\
 D\partial_t\Phi(\bullet, M[t]) &= \vec{\omega} \times \partial_t\Phi(\bullet, M[t]), \\
 2\partial_{1,2}M'(t, t) &= 2\vec{\omega}[t] \times \partial_1M'(t, t) = 2\vec{\omega}[t] \times \vec{v}_{r,M'}[t] \\
 &= \vec{\gamma}_{c,M'}[t].
 \end{aligned}$$

□

Les théorèmes 3.12 et 3.13 servent à comparer les observations dans différents référentiels-espaces, et éventuellement en trouver un, dans lequel le mouvement et les lois qui le régissent soient plus simples.

Par exemple, les orbites du Soleil et de la Lune sont des cercles (approximativement) dans le référentiel-espace terrestre, alors que l'orbite de La Lune est une trochoïde dans un référentiel-espace héliocentrique. Tant qu'on ne s'intéresse qu'au Soleil et à la Lune, qui sont les deux astres les plus brillants, le référentiel-espace terrestre, celui de Ptolémée, est le plus simple. Mais dès qu'on s'intéresse de près aux planètes autres que la Terre (Vénus, Mars... quelle est leur orbite dans le référentiel-espace terrestre?), alors, c'est un référentiel-espace héliocentrique qui s'impose, comme celui de Copernic.

Exercice : proposer un théorème de composition des vitesses d'accélération (dérivées troisièmes). Ce théorème ne sert à rien. Pourquoi ?

### 3.2.7 Contact en mouvement

**Définition 3.30** (glissement). *Soit deux corps mobiles ( $M_\bullet$ ) et ( $N_\bullet$ ) en contact à un instant  $t$  en un point*

$$O \in \mathcal{E}, \exists i, j, O = M_i[t] = N_j[t].$$

*Le contact à l'instant  $t$  en  $O$  est sans glissement si la vitesse de glissement*

$$\vec{v}_{N_j}[t] - \vec{v}_{M_i}[t]$$

*est nulle.*

**Définition 3.31** (pivotement, roulement). *Deux solides en contact sans glissement (mais dont l'union n'est pas un solide) pivotent l'un sur l'autre pendant si un des deux corps de contact est étanche, sinon ils roulent l'un sur l'autre.*

FIG. 3.1 – Solide roulant sans glisser

FIG. 3.2 – Solide pivotant ou roulant sans glisser

Si un corps de contact est étanche, alors l'autre aussi, les deux ont la même image, et sont dégénérés. Exercice : montrer que le roulement permet un corps de contact non-dégénéré.

Sur la figure 3.2, si un seul sommet de l'étoile reste en contact avec le demi-espace, alors l'étoile pivote ; si plusieurs sommets se succèdent au contact, alors l'étoile roule.

Un solide en contact sans glissement avec un support à bord plan roule toujours si et seulement si son image est strictement convexe (critère global) et l'image de son bord est lisse (critère local). En remplaçant un bord roulant par un polyèdre (ou un polygone), on obtient une succession de pivotements pendant des durées finies, qui tend vers le roulement, en même temps que le polygone tend vers un cercle.

Soit deux solides, inclus dans des référentiels-espaces  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}''$ , en contact sans glissement à un instant  $t$  en un point  $O$ . Les torseurs cinématiques

$$\vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \vec{v}'_e, \quad \vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}'') = \vec{v}''_e$$

sont liés par (déf. 3.30) :

$$\forall M, M' \in \mathcal{E}, \vec{v}'_{e,M}[t] + \vec{\omega}'[t] \times \overrightarrow{MO} = \vec{v}''_{e,M'}[t] + \vec{\omega}''[t] \times \overrightarrow{M'O}.$$

Si  $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}$ , alors  $\vec{v}''_e[t] = 0$  et  $M$  est un « centre instantané de rotation » (fig. 3.1) :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \vec{v}'_{e,M}[t] = \vec{\omega}'[t] \times \vec{r}_M.$$

## 3.3 Cinétique

### 3.3.1 Corps massif

**Définition 3.32** (corps massif). *Un corps massif est un corps  $(M_i, i \in P)$  muni d'une mesure (déf. 2.27)  $\rho \geq 0$  dont le support est inclus dans l'image du corps  $\{M_i, i \in P\}$ .*

*Le contenu du corps en une quantité réelle de densité  $f \in \mathbf{CK}[\mathcal{E}, \mathbb{R}]$  est  $F = \langle \rho, f \rangle$ .*

#### Masse

Si l'image du corps est bornée, alors  $\langle \rho, f \rangle$  existe pour  $f$  seulement continue et la masse du corps est

$$m = \langle \rho, 1 \rangle \in \mathbb{R}^+. \quad (3.34)$$

Si  $\rho$  est régulière, alors elle s'identifie à une fonction (localement sommable),

$$F = \int \rho f,$$

et la masse du corps (borné ou non) est

$$m = \int \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Pour un corps massif à un seul point  $M$ ,  $\rho$  étant à la fois supportée par  $M$  et positive, ne peut qu'être proportionnelle à la mesure de Dirac en  $M$  :

$$\exists m \geq 0, \rho = m\delta_M.$$

Quelle est la masse de  $M$  ? De même, pour un corps massif discret,

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i=1}^N m_i \delta_{M_i}, & m_i &\geq 0. \\ F &= \sum_{i=1}^N m_i f_i, & m &= \sum_{i=1}^N m_i, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $m_i f_i$  est la quantité de  $F$  portée par  $M_i$ .

Pour un corps massif quelconque, et pour une partition  $(A_i)$  de  $\mathcal{E}$ , telle que chaque maille  $A_i$  admette un volume et une masse,

$$\rho = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i \delta_i, \quad m_i = \langle \rho, \chi_{A_i} \rangle. \quad (3.36)$$

$$\forall f \in \mathbf{CK}[\mathcal{E}, \mathbb{R}], \quad \langle \rho, f \rangle = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i f_i, \quad M_i \in A_i. \quad (3.37)$$

Pour calculer une quantité  $F$ , on peut utiliser  $\rho$  ou son expression comme limite (3.36). On peut ainsi passer d'un modèle eulérien à un modèle lagrangien.

(3.35) reste vraie « en moyenne » pour un corps massif quelconque partitionné, avec

$$m_i \mapsto \langle \rho, \chi_{A_i} \rangle, \quad f_i \mapsto \langle f \rangle_i = \frac{\langle \rho, \chi_{A_i} f \rangle}{\langle \rho, \chi_{A_i} \rangle}, \quad (3.38)$$

ce qui sert de base aux méthodes de calcul en volume fini.

### Barycentre

**Définition 3.33** (barycentre). *Un barycentre d'un corps massif borné  $((M_\bullet), \rho)$  et de masse non-nulle  $m$  est  $G \in \mathcal{E}$  tel que*

$$\forall O \in \mathcal{E}, \quad m\vec{r}_G = \langle \rho, \vec{r} \rangle.$$

$G$  dans (déf. 3.33) existe et est unique.

$$\langle \rho, \overrightarrow{GM} \rangle = 0. \quad (3.39)$$

Avec (3.36),

$$\vec{r}_G = \lim_{m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3.40)$$

Alternativement, avec (3.35, 3.38),

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \langle \vec{r} \rangle_i}{\sum_i m_i}$$

et avec une seule maille, on remarque que la position du barycentre est la position moyenne :  $\vec{r}_G = \langle \vec{r} \rangle$ .

### 3.3.2 Conservation de la masse

**Principe 3.1** (conservation de la masse). *La masse totale de tout corps massif mobile étanche est constante.*

En particulier, si un point mobile porte une masse, celle-ci est constante.

Soit un corps massif mobile étanche de champ de vitesse  $\vec{v}_e \mathbf{C}_1$  et de mesure de masse mobile  $\rho$  régulière. On fait le bilan de masse sur une partie

mobile  $A$  de  $\mathcal{E}$ , instantanément bornée, de bord lisse orienté extérieurement, et mesurable en volume, puis on applique le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A[t]} \rho[t] &= \int_{A[t]} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{\partial A[t]} \rho \vec{v}_e \cdot \vec{n}_{\text{ext}} d^2 S \\ &= \int_{A[t]} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}_e) \right). \end{aligned}$$

Si  $A$  est étanche (aucun point du corps n'entre ni ne sort), alors, par principe 3.1,

$$\begin{aligned} \int_{A[t]} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}_e) \right) &= 0. \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}_e) &= 0 \text{ presque partout.} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pour exploiter la conservation de la masse point par point dans le calcul des quantités cinétiques, il est souvent plus simple de passer par (3.36) avec un maillage étanche :

$$\rho[t] = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i[t] \delta_{M_i[t]}, \quad m_i[t] = \int_i \rho[t] = \text{cst.} \quad (3.42)$$

En particulier, en dérivant (3.40),

$$m \vec{v}_G = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i \vec{v}_i = \langle \rho, \vec{v}_e \rangle. \quad (3.43)$$

Exercice : démontrer (3.43) pour une mesure de masse régulière en dérivant directement (déf. 3.33) et en utilisant

$$\frac{d}{dt} \int_{A[t] \text{ étanche}} \rho f = \int_{A[t]} \frac{D\rho f}{Dt}.$$

En développant le gradient par bilinéarité dans (3.41), on reconnaît une dérivée lagrangienne (3.24) :

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_e \quad (3.44)$$

$$= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_e. \quad (3.45)$$

Si  $\rho \neq 0$ , on en tire la compression relative

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_e. \quad (3.46)$$

Dans le cas solide, quelles sont les conséquences de la conservation de la masse ?

**Théorème 3.14.** *Le barycentre d'un solide inclus dans un référentiel-espace  $\mathcal{E}'$  appartient à  $\mathcal{E}'$ .*

*Démonstration.* Considérer (3.40) avec  $M_i \in \mathcal{E}'$ . Un référentiel-espace est non seulement un référentiel, mais aussi un espace affine, où le barycentre est défini (de même que la combinaison linéaire vectorielle).  $\square$

Exercice : montrer que tout solide est incompressible, d'abord avec (3.46, 3.25), puis, sans calcul, en passant dans un référentiel-espace du solide. Réciproquement, tout corps incompressible est-il solide ?

### 3.3.3 Torseur cinétique

**Définition 3.34** (moment cinétique). *Le moment cinétique d'un corps massif  $((M_\bullet), \rho)$  en  $O \in \mathcal{E}$  est*

$$\vec{\sigma}_O = \langle \rho, M \mapsto \vec{r}_M \times \vec{v}_{e,M} \rangle = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (3.47)$$

**Théorème 3.15.**  *$\vec{\sigma}$  est un torseur mobile, dit cinétique, dont la résultante est la quantité de mouvement  $m\vec{v}_G$ .*

*Démonstration.* On calcule  $\vec{\sigma}_{O'}$  avec (3.1, déf. 3.33) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O'} &= \langle \rho, M \mapsto \vec{r}'_M \times \vec{v}_{e,M} \rangle \\ &= \langle \rho, M \mapsto (\vec{r}_M + \overrightarrow{O'O}) \times \vec{v}_{e,M} \rangle \\ &= \vec{\sigma}_O + m\vec{v}_G \times \overrightarrow{OO'}. \end{aligned}$$

$\square$

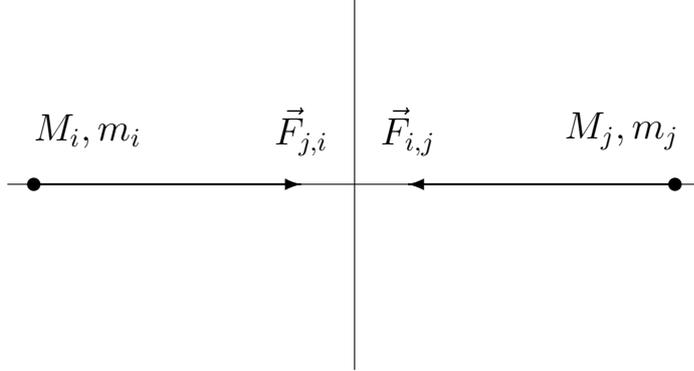
## 3.4 Dynamique

### 3.4.1 Principes

**Principe 3.2** (d'accélération). *Chaque point  $M_i$  du corps  $(M_j)$  subit les forces  $\vec{F}_{i,i}(t, \vec{r}_i, \vec{v}_i)$  extérieure, et, pour tout  $j \neq i$ ,  $\vec{F}_{j,i}(t, \vec{r}_{i,j}, \vec{v}_{i,j})$  intérieure, venant de  $M_j$  :*

$$m_i \vec{\gamma}_i = \vec{F}_i(t, \vec{r}_{i,j}, \vec{v}_{i,j}), \quad \vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{j,i}. \quad (3.48)$$

FIG. 3.3 – Principe d'action-réaction



**Principe 3.3** (d'action-réaction).

$$\vec{F}_{i,j} \times \vec{r}_{i,j} = 0, \quad \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i} = 0. \quad (3.49)$$

Une grande partie du contenu des principes 3.2, 3.3 peut être rattachée, plus fondamentalement, à l'homogénéité et l'isotropie de l'espace : la force  $\vec{F}_{j,i}$  est invariante par translation simultanée de  $M_i, M_j$ , par rotation autour de  $\vec{r}_{i,j}$ , par échange des points  $M_i \leftrightarrow M_j$ .

### 3.4.2 Invariance

Le principe 3.2 est absolu. On veut le rendre invariant.

**Principe 3.4** (invariance dynamique). *Les forces  $\vec{F}_{j,i}$  sont invariantes (en valeur, par changement de référentiel-espace) :*

$$\vec{F}'_{j,i}(t, \vec{r}'_{i,j}, \vec{v}'_{i,j}) = \vec{F}_{j,i}(t, \vec{r}_{i,j}, \vec{v}_{i,j}). \quad (3.50)$$

On traduit (3.48) dans un référentiel-espace  $\mathcal{R}'$ , d'une part, en exprimant l'accélération relative au moyen de (thé. 3.13), d'autre part, en exprimant les forces au moyen de (3.50) :

$$m_i \vec{\gamma}'_i = -m_i \vec{\gamma}'_{M_{i,e}} - m_i \vec{\gamma}'_{c,i} + \vec{F}'_i(t, \vec{r}'_{i,j}, \vec{v}'_{i,j}) = -m_i \vec{\gamma}'_{M_{e,i}} - m_i \vec{\gamma}'_{c,i} + \vec{F}_i.$$

Les deux premiers termes à droite sont des forces inertielles, ou des pseudo-forces, dues seulement au mouvement de l'observateur, et non à une interaction matérielle.

De plus, on suppose (et on vérifie expérimentalement) que  $\mathcal{R}$  peut être choisi de sorte que la force d'interaction gravitationnelle (la seule considérée pour l'instant) soit donnée par la loi de Newton, remarquablement indépendante des vitesses :

$$\vec{F}_{j,i} = \frac{Gm_i m_j}{r_{i,j}^3} \vec{r}_{i,j}, \quad G > 0. \quad (3.51)$$

Les référentiels-espaces galiléens sont les  $\mathcal{R}'$  glissant à vitesse constante sur  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\omega}(t, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0, \quad \vec{\gamma}_{M_e, t}(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \text{cst.} \quad (3.52)$$

Ainsi, le principe 3.2 possède une invariance restreinte aux seuls référentiels-espaces galiléens.

Un référentiel-espace peut être considéré comme galiléen, tant que les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont négligeables, en vue d'un certain usage. Par exemple, le référentiel-espace terrestre était galiléen pour Galilée, qui mesurait le temps de chute d'un corps d'une hauteur de quelques mètres, avec une erreur de l'ordre d'une fraction de seconde, mais non pour Foucault, qui mesurait la rotation en quelques heures du plan d'oscillation d'un pendule. En outre, (3.51) suppose que l'interaction se propage à vitesse infinie, mais cela est contredit en particulier par le phénomène d'aberration astronomique (Bradley).

(3.48) forme un système de  $3N$  équations différentielles d'ordre deux, équivalent à un système de  $6N$  équations différentielles d'ordre un. Pour une loi de force suffisamment régulière, et pour  $6N$  conditions initiales, (thé. 2.22) assure l'existence et l'unicité d'une solution, sur au moins un intervalle ouvert contenant l'instant initial.

### 3.4.3 Théorème des torseurs cinétique et dynamique

**Définition 3.35** (moment dynamique). *Le moment dynamique en un point  $O$  d'un corps  $(M_\bullet)$ , soumis à des forces  $\vec{F}_\bullet$ , est*

$$\vec{\Gamma}_O = \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i}. \quad (3.53)$$

**Théorème 3.16.**  $\vec{\Gamma}$  est un torseur, le torseur dynamique, de résultante

$$\vec{F} = \sum_{i,j} \vec{F}_{j,i}.$$

*Démonstration.*

$$\vec{\Gamma}_{O'} = \sum_{i,j} (\overrightarrow{O'O} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_{j,i} = \vec{\Gamma}_O + \vec{F} \times \overrightarrow{OO'}.$$

□

De plus,

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{j,i} = \left( \sum_i \vec{F}_{i,i} \right) + \sum_{i<j} (\vec{F}_{j,i} + \vec{F}_{i,j}).$$

Or, à cause du principe 3.3, les forces intérieures ne contribuent pas à la résultante dynamique :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_{i,i},$$

ni au moment dynamique :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} &= \left( \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,i} \right) + \sum_{i<j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j}), \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j} &= \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = 0, \\ \forall O \in \mathcal{E}, \vec{\Gamma}_O &= \vec{\Gamma}_{O,\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,i}. \end{aligned}$$

La non-contribution des forces intérieures permet un étude en « boîte noire », en ne considérant que les forces extérieures, souvent mieux connues et (si  $N > 2$ ) moins nombreuses que les forces intérieures.

**Théorème 3.17** (des torseurs cinétique et dynamique). *Les deux torseurs sont reliés, par leurs résultantes et leurs moments :*

$$d_t(m\vec{v}_G) = \vec{F}.$$

$$\forall O : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{E}, D\vec{\sigma}_O + \vec{v}_O \times m\vec{v}_G = \vec{\Gamma}_O.$$

*La dérivée du torseur cinétique est, à un terme près, le torseur dynamique.*

*Démonstration.* Pour (3.17), dériver (3.43). Pour (3.17), dériver (3.47), et remplacer les accélérations par les forces, à l'aide de (pri. 3.2).

$$D\vec{\sigma}_O = \sum_i ((\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \vec{\gamma}_i) = -\vec{v}_O \times m\vec{v}_G + \vec{\Gamma}_O.$$

□

Le théorème 3.17 permet d'obtenir le torseur cinétique, par intégration du torseur dynamique. En particulier, on obtient ainsi la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique d'un mouvement isolé,  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ,  $\vec{\Gamma}_{\text{ext}} = 0$ , qu'on peut aussi obtenir plus directement de l'homogénéité et l'isotropie de l'espace.

Inversement, le théorème 3.17 permet d'obtenir le torseur dynamique, par dérivation du torseur cinétique. On procède ainsi dans des problèmes - de transport : quels efforts faut-il exercer pour obtenir un certain mouvement ? - de rupture ou de glissement : quels efforts produisent un mouvement borné ?

Les six degrés de liberté du torseur cinétique déterminent le mouvement de deux points ou d'un solide. Pour déterminer le mouvement d'un corps possédant strictement plus de six degrés de liberté, on applique les théorèmes à des mouvements partiels. Par exemple, pour trois points (neuf degrés de liberté), on peut appliquer tout d'abord globalement le théorème 3.17 à la résultante cinétique (trois degrés de liberté), puis le théorème 3.17 sur la résultante et le moment (six degrés de liberté) sur un couple de points, le troisième intervenant en tant que force extérieure. De ce problème « des trois corps », on ne connaît que quelques solutions particulières ou numériques approchées.

# Chapitre 4

## Mécanique vectorielle du solide

### 4.1 Géométrie

À partir d'une base orthonormale droite  $(\vec{e}_i)$ , on construit par rotations successives une base orthonormale droite  $(\vec{E}_i)$ . Dans un premier temps, on obtient, par *précession* et *nutation* d'angles  $\psi, \theta$ ,

$$\begin{aligned}\vec{e}_\psi &= \vec{e}_3, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \psi \vec{e}_1 + \sin \psi \vec{e}_2, \\ \vec{e}_\varphi &= \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_\theta \times \vec{e}_3.\end{aligned}$$

La direction nodale est  $\vec{e}_\theta$ . La base oblique d'Euler est

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

La base orthonormale *nodale* est la base oblique d'Euler, orthogonalisée pour coïncider avec  $(\vec{e}_i)$  lorsque  $\psi = \theta = 0$  :

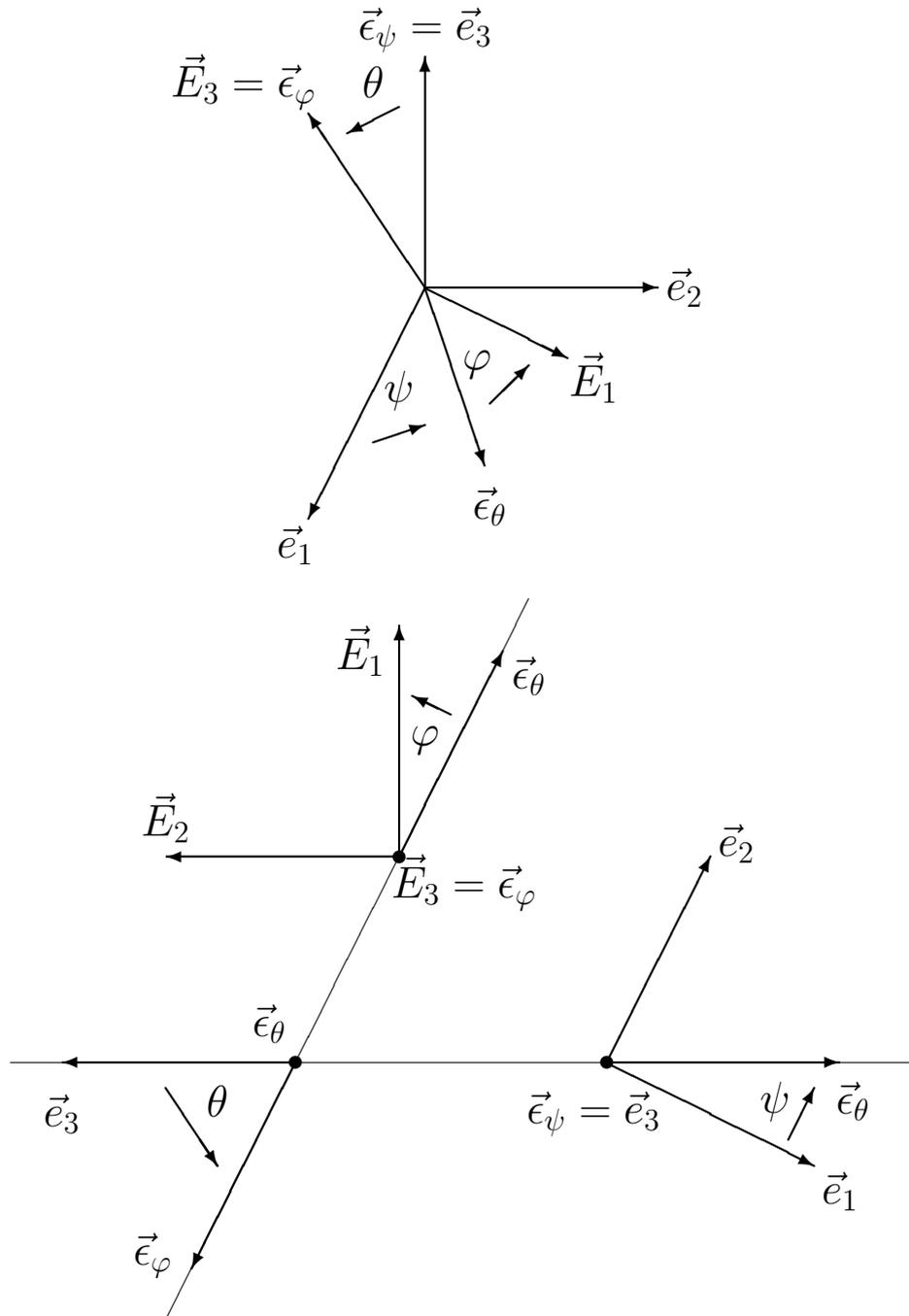
$$(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi),$$

qui permet d'éliminer la base oblique d'Euler :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = p(\theta) \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Dans un second temps, à partir de la base nodale, on obtient par *rotation*

FIG. 4.1 – Les angles d'Euler, en perspective et vues planes rabattues



propre d'angle  $\varphi$ , la base  $(\vec{E}_i)$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}_3 &= \vec{\epsilon}_\varphi, \\ \vec{E}_1 &= \cos \varphi \vec{\epsilon}_\theta + \sin \varphi \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta, \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_3 \times \vec{E}_1.\end{aligned}$$

Toute base  $(\vec{E}_i)$  peut être obtenue en trois rotations :

- La précession d'angle  $\psi$  autour de  $\vec{\epsilon}_\psi$ .
- La nutation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{\epsilon}_\theta$ .
- La rotation propre d'angle  $\varphi$  autour de  $\vec{\epsilon}_\varphi$ .

$\psi, \varphi$  sont uniques (modulo  $2\pi$ ) si et seulement si  $\sin \theta \neq 0$ .

En notant  $(y \leftarrow x)$  l'application linéaire qui transforme une base  $(x_i)$  en une base  $(y_i)$ ,

$$y_i = (y \leftarrow x)_{i,j} x_j.$$

On dispose des lois du groupe linéaire :

$$\begin{aligned}(z \leftarrow x) &= (z \leftarrow y)(y \leftarrow x), \\ (x \leftarrow x) &= 1, \\ (y \leftarrow x)^{-1} &= (x \leftarrow y).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Si de plus  $(y \leftarrow x)$  est une application orthogonale, transformant une base orthonormale en une base orthonormale, alors

$$(y \leftarrow x)^{-1} = (y \leftarrow x)^t.\tag{4.4}$$

Enfin, (4.3, 4.4) forment conjointement les lois du *groupe linéaire orthogonal*, formellement applicables à  $x, y \in \{e, \epsilon, E\}$ .

Comment passer, concrètement, de l'une à l'autre des trois bases orthonormales considérées ? Tout d'abord,

$$\begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \end{pmatrix} = (\epsilon \leftarrow e) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.\tag{4.5}$$

La première et la troisième lignes sont copiées de (4.1). La deuxième est le complément orthonormal direct, autrement dit le produit vectoriel des deux autres. Exercice : vérifier directement que  $(\epsilon \leftarrow e)$  est une matrice orthogonale positive, coïncidant avec la matrice identique pour  $\theta = \psi = 0$ .

Ensuite, d'après (4.3),

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} = (E \leftarrow \epsilon) \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \end{pmatrix}.\tag{4.6}$$

(4.5, 4.6) permettent de passer de l'une à l'autre des trois bases ortho-normales  $e, \epsilon, E$ , moyennant des produits et transpositions, mais aucune inversion, grâce à (4.3, 4.4).

## 4.2 Cinématique

Soit une base  $(\vec{e}_i)$  de  $\mathcal{R}$  et une base  $(\vec{E}_i)$  de  $\mathcal{R}'$ . Soit le référentiel-espace  $\mathcal{R}''$  de la base nodale. Par le théorème 3.8,

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}'' + \vec{\omega}(\mathcal{R}'', \mathcal{R}'),$$

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}'', \mathcal{R}') = \dot{\varphi} \vec{\epsilon}_\varphi, \quad \vec{\omega}'' = \dot{\theta} \vec{\epsilon}_\theta + \dot{\psi} \vec{\epsilon}_\psi. \quad (4.7)$$

$\vec{\omega}''$  est la vitesse de précession-nutation, excluant la rotation propre. Pour un corps de révolution, dont la rotation propre est « invisible »,  $\vec{\omega}''$  est la vitesse angulaire visible ou apparente.

Au total,

$$\vec{\omega}' = \dot{\theta} \vec{\epsilon}_\theta + \dot{\psi} \vec{\epsilon}_\psi + \dot{\varphi} \vec{\epsilon}_\varphi. \quad (4.8)$$

D'où l'expression de la vitesse angulaire dans la base nodale :

$$\vec{\omega}' = (\dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\varphi}) p(\theta) \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \end{pmatrix} = (\dot{\theta} \quad \dot{\psi} \sin \theta \quad \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \times \vec{\epsilon}_\theta \\ \vec{\epsilon}_\varphi \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Puis dans la base du solide :

$$\vec{\omega}' = (\dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\varphi}) p(\theta) (\epsilon \leftarrow E) \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}.$$

Or, d'après (4.6),

$$(\epsilon \leftarrow E) = (E \leftarrow \epsilon)^{-1} = (E \leftarrow \epsilon)^t = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\vec{\omega}' = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \quad -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \quad \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La cinématique solide s'applique en particulier à la Terre. On choisit la base propre d'inertie  $(\vec{E}_i)$ ,  $\vec{E}_3$  vers le nord, et la base  $(\vec{e}_i)$  sidérale,  $\vec{e}_3$  perpendiculaire au plan écliptique (de l'orbite terrestre, où les éclipses sont visibles) et vers le nord ( $\theta < \pi/2$ ). La direction équinoxiale est la direction nodale  $\epsilon_\theta$ , dirigeant l'intersection du plan écliptique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et du plan équatorial  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  (aux équinoxes, l'axe Terre-Soleil est équinoxial).

En se couchant les pieds au sud et la tête au nord, on voit le Soleil tourner dans le sens trigonométrique indirect des aiguilles d'une montre (reproduisant celui de l'ombre du cadran solaire pour l'hémisphère nord). Donc, inversement, dans le référentiel-espace des étoiles, la Terre tourne dans le sens trigonométrique direct. L'observation du Soleil montre  $\theta \approx 23^\circ 27'$ , mais avec de minuscules oscillations, d'amplitude  $9''$  ( $\sin 9'' \approx 4 \cdot 10^{-5}$ ) et de période 19 ans (Bradley). La direction équinoxiale précesse (Hipparque), à la période  $2\pi/\dot{\psi} \approx -26$  kan. En négligeant la précession des équinoxes, la période de rotation propre  $2\pi/\dot{\varphi}$  est voisine du jour sidéral, 23 h 56 min (inférieur au jour solaire, 24 h, parce que la Terre tourne aussi autour du Soleil dans le sens trigonométrique direct).

## 4.3 Cinétique

### 4.3.1 Opérateur d'inertie

Soit un solide massif de  $\mathcal{E}$  inclus dans un référentiel-espace  $\mathcal{E}'$ , de tenseur cinématique et de vitesse angulaire

$$\vec{v}_e(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \vec{v}'_e, \quad \vec{\omega}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \vec{\omega}'.$$

$\mathcal{E}'$  n'est unique que si le solide est non-dégénéré.

On veut calculer le tenseur cinétique  $\vec{\sigma}$  en fonction du tenseur cinématique, ou, plus précisément, de sa réduction en  $O \in \mathcal{E}$ .

Tout d'abord, la résultante cinétique est obtenue simplement en appliquant (3.25) à  $G \in \mathcal{E}'$  (thé. 3.14) :

$$m\vec{v}_G = m(\vec{v}'_{e,O} + \vec{\omega}' \times \vec{r}_G).$$

Ensuite, pour le moment cinétique, on développe (3.47) avec (3.25) :

$$\vec{\sigma}_O = \langle \rho, M \mapsto \vec{r}_M \times (\vec{v}'_{e,O} + \vec{\omega}' \times \vec{r}) \rangle \quad (4.11)$$

$$= m\vec{r}_G \times \vec{v}'_{e,O} + \langle \rho, M \mapsto \vec{r}_M \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_M) \rangle. \quad (4.12)$$

**Définition 4.1.** *La densité en  $M$  de l'opérateur d'inertie en un point  $O \in \mathcal{E}$  est*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{O,M} : E &\rightarrow E \\ \vec{\omega} &\mapsto \vec{r}_M \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M). \end{aligned}$$

L'opérateur d'inertie à un instant  $t$  en  $O$  est donc (3.32) l'intégrale de sa densité :

$$I_O[t] = \langle \rho[t], M \mapsto \mathcal{I}_{O,M} \rangle. \quad (4.13)$$

$\mathcal{I}_{O,M}$  donc son intégrale  $I_O[t]$  sur  $M$  sont des opérateurs linéaires.

Attention :  $\rho$  donc  $I_O$  (mais non  $\mathcal{I}$ ) sont des fonctions du temps!

$$\forall O, M \in \mathcal{E}, \mathcal{I}_{O,M} = \mathcal{I}_{M,O}. \quad (4.14)$$

Avec (1.20),

$$\mathcal{I}_{O,M} = \mathcal{I}(\vec{r}), \quad \mathcal{I}(\vec{r})(\vec{\omega}) = \mathcal{I}(\vec{r}, \vec{\omega}).$$

$\mathcal{I}(\bullet, \vec{\omega})$  est paire.

On calcule en développant (déf. 4.1) avec (1.81) en en reconnaissant un produit tensoriel apparaît à la fin :

$$\begin{aligned} \forall \vec{r}, \vec{\omega} \in E, \mathcal{I}(\vec{r}, \vec{\omega}) &= \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}, \\ \mathcal{I}(\vec{r}, \bullet) &= r^2 \text{Id}_E - \vec{r} \vec{r}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\mathcal{I}_{O,M}$  donc son intégrale  $I_O[t]$  sur  $M$  sont des opérateurs linéaires symétriques :

$$\forall \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\psi} \in E, \vec{\psi} \cdot \mathcal{I}(\vec{r}, \vec{\omega}) = r^2 \vec{\psi} \cdot \vec{\omega} - (\vec{\psi} \cdot \vec{r})(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \mathcal{I}(\vec{r}, \vec{\psi}) \cdot \vec{\omega}.$$

**Théorème 4.1** (de l'opérateur d'inertie). *Le moment cinétique d'un solide en  $O \in \mathcal{E}$  est*

$$\vec{\sigma}_O = m \vec{r}_G \times \vec{v}'_{e,O} + I_O(\bullet, \vec{\omega}'). \quad (4.16)$$

*Démonstration.* Continuer (4.12) en utilisant l'opérateur d'inertie (déf. 4.1).  $\square$

Si  $\mathcal{E}'$  est en translation ( $\vec{\omega}' = 0$ ), alors la vitesse d'entraînement est la même partout et le théorème 4.1 dit que le moment cinétique du solide est celui de son barycentre affecté de toute la masse. (4.16) décompose le moment cinétique en un terme de translation et un terme de rotation.

**Théorème 4.2.** *L'opérateur d'inertie en deux point, dont l'un est l'image du barycentre, sont liés par*

$$\forall t, \forall O \in \mathcal{E}, I_O[t] = I_{G[t]} + m\mathcal{I}_{O,G[t]}.$$

$m\mathcal{I}_{O,G[t]}$  est aussi l'opérateur d'inertie en  $O$  résultant de la mesure de masse  $m\delta_{G[t]}$ , concentrant virtuellement toute la masse en  $G[t]$  (Huygens-Steiner).

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} \forall \vec{\omega} \in E, \mathcal{I}_{O,M}(\vec{\omega}) &= (\vec{r}_{G[t]} + \overrightarrow{G[t]M}) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_{G[t]} + \overrightarrow{G[t]M})) \\ &= \mathcal{I}_{G[t],M}(\vec{\omega}) + \mathcal{I}_{O,G[t]}(\vec{\omega}) + \vec{r}_M \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{G[t]M}) + \overrightarrow{G[t]M} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M). \end{aligned}$$

Puis on applique  $\rho$ , et les termes croisés s'annulent en raison de (3.39),

$$\forall t, \forall \vec{\omega} \in E, I_O(t, \vec{\omega}) = I_{G[t]}(t, \vec{\omega}) + m\mathcal{I}_{O,G[t]}(\vec{\omega}).$$

□

$I_O$  est une fonction du temps, rarement donnée en pratique. On va éliminer cette dépendance temporelle par changement de référentiel-espace. On continue avec une mesure régulière  $\rho : ([t_1, t_2], \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit un référentiel-espace  $\mathcal{E}''$  (de vitesse angulaire  $\vec{\omega}''$  et) dans lequel la transformée (3.2.2)  $\rho'' : ([t_1, t_2], \mathcal{E})'' \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\rho$  par le flot de  $\mathcal{E}''$  est stationnaire (déf. 3.19) :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{E}, \rho''(t, M) &= \text{cst}, t \in [t_1, t_2], \\ \forall O \in \mathcal{E}, I_O''[t] &= \int dM \rho''(t, M) \mathcal{I}_{O,M} = \text{cst}, t \in [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Matrice d'inertie

Soit une base orthonormale droite  $(\vec{e}_i'')$  de  $E''$ . De (4.15), on tire

$$\forall (\vec{r}'' \in E'', \vec{r}'' = \sum_{i=1}^3 x_i'' \vec{e}_i''), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_i'' \cdot \mathcal{I}(\vec{r}'', \vec{e}_j'') &= (x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2) \delta[i, j] - x_i'' x_j'', \\ \text{ten}_{\vec{e}_i''} \mathcal{I}(\vec{r}'', \bullet) &= \begin{pmatrix} x_2''^2 + x_3''^2 & -x_1'' x_2'' & -x_1'' x_3'' \\ -x_2'' x_1'' & x_1''^2 + x_2''^2 & -x_2'' x_3'' \\ -x_3'' x_1'' & -x_1'' x_3'' & x_2''^2 + x_3''^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

On transpose (4.17) dans  $\mathcal{E}''$  :

$$\begin{aligned} \forall O'' \in \mathcal{E}'', J''_{O''} &= \int dM \rho''(M) \mathcal{J}_{O'', M} \\ &= \int d\vec{r}'' \rho''(O'' + \vec{r}'') \mathcal{J}(\vec{r}'', \bullet). \end{aligned}$$

$$\text{ten}_{\vec{e}''_i} J_{O''} = \int d\vec{r}'' \rho''(O'' + \vec{r}'') \text{ten}_{\vec{e}''_i} \mathcal{J}(\vec{r}'', \bullet).$$

On continue avec un corps continu de dimension  $n \in \{1, 2, 3\}$ . On exprime à part la mesure de masse, car elle va servir à calculer non seulement l'opérateur d'inertie, mais encore le barycentre (déf. 3.33) et la masse (3.34). Pour cela, le paramétrage naturel du corps s'impose :

$$\int d\vec{r}'' \rho''(O'' + \vec{r}'') = \int dX_1 \dots dX_n \left| \det \frac{d\phi}{d(X_1 \dots X_n)} \right| \rho'' \circ \phi(X_1 \dots X_n).$$

\*\*\*\*

### 4.3.3 Base propre d'inertie

$J''_{O''}$  étant symétrique, il est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  dans une base orthonormale (thé. 1.37). À partir de sa matrice dans une base quelconque, on peut toujours construire algébriquement une base propre orthonormale, mais, on sera bien avisé d'utiliser au maximum les symétries.

Si le solide massif est invariant par réflexion, il existe et on choisit  $O'$  dans le plan de réflexion et un vecteur de base  $\vec{e}''_i$  normal au plan de réflexion. Alors, les coefficients d'inertie  $J_{O', i, j}$ ,  $j \neq i$  sont nuls. Il reste seulement à diagonaliser une matrice de dimension  $(2, 2)$ .

Deux réflexions par rapport à des plans *orthogonaux* donnent directement la diagonalisation.

Soit un solide massif invariant par une rotation d'angle  $\theta \neq 0$  (modulo  $2\pi$ ) autour de l'axe  $(O', \vec{e}_\theta)$ . Une base propre orthonormale donne par cette rotation une base propre orthonormale.

Si les trois valeurs propres étaient distinctes, alors la base propre orthonormale serait unique (au signe et à l'ordre près des vecteurs propres). Elle devrait donc être globalement invariante par la rotation, donc ou bien  $\theta = \pi/2$  (modulo  $\pi$ ) et l'axe de la rotation est propre, ou bien  $\theta = 2\pi/3$  et l'axe de la rotation est la grande diagonale des trois axes propres. Mais alors, au moins deux valeurs propres seraient confondues, ce qui est absurde.

Donc, il existe une *valeur propre double* et un plan propre  $P$ , qui donne par rotation un plan propre  $P'$ . Si  $P \neq P'$ , alors l'opérateur d'inertie est

TAB. 4.1 – Les torseurs du mouvement solide

torseur	cinématique	cinétique	dynamique
résultante	$\vec{\omega}'$	$m\vec{v}_G$	$\vec{F}$
moment	$\vec{v}'_{e,S}$	$\vec{\sigma}_S$	$\vec{\Gamma}_S$

proportionnel à l'identité, et sa matrice est déjà diagonale. Si  $P = P'$ , alors deux cas seulement restent possibles :

- $\vec{e}_\theta \parallel P$ ,  $\theta = \pi$  (modulo  $2\pi$ ), et une base propre orthonormale est construite sur  $\vec{e}_3'' = \vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_1'' \in P$ . Encore faut-il déterminer  $P$ , algébriquement ou géométriquement, par symétrie. (Exemple : hélice à deux pales.)
- $\vec{e}_\theta \perp P$ ,  $\theta = 2\pi/n$ ,  $n \geq 3$  et une base propre orthonormale est construite sur  $\vec{e}_3'' = \vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_1'' \in P$ . (Exemple : hélice à trois pales.)

## 4.4 Dynamique

### 4.4.1 Théorème du moment cinétique

**Théorème 4.3** (du moment cinétique solide).

$$\forall S \in \mathcal{R}', D(J_S \vec{\omega}') + \vec{r}_G' \times m \vec{\gamma}_S = \vec{\Gamma}_{S,ext}.$$

*Démonstration.* On applique le théorème de l'opérateur d'inertie à  $S \in \mathcal{R}'$  :

$$\vec{\sigma}_S = J_S \vec{\omega}' + \vec{r}_G' \times m \vec{v}_S.$$

On dérive :

$$D\vec{\sigma}_S = D(J_S \vec{\omega}') + m(\vec{v}_G \times \vec{v}_S + \vec{r}_G' \times \vec{\gamma}_S),$$

puis on compare au théorème du moment cinétique.  $\square$

$\vec{r}_G' \times \vec{\gamma}_S$  s'annule si  $S = G$ . Cependant, dans un problème de contact en un point mobile  $I$ , pour éliminer la contribution au moment dynamique de la force de contact inconnue, on applique le théorème du moment cinétique à  $S \in \mathcal{R}'$ , coïncidant instantanément avec le point de contact. D'où l'intérêt de ne pas supposer  $S = G$  en théorie.

Avec  $S \neq G$ , il faut calculer  $\vec{r}_G' \times \vec{\gamma}_S$ , en tenant compte des contraintes cinématiques. Dans un problème de pivotement autour de  $S$ ,  $\vec{v}_S = \vec{\gamma}_S = 0$ . Mais dans un problème de roulement,  $\vec{\gamma}_S[t] \neq 0$  en général, bien que  $\vec{v}_S[t] = 0$  instantanément.

### 4.4.2 Equations d'Euler et effets gyroscopiques

En outre,  $J_S$  dépend en général du temps dans  $\mathcal{R}$  (via  $\rho$ ),

$$\frac{dJ_S}{d\bullet} \neq 0,$$

si bien qu'il ne commute pas avec  $d_t$  dans le théorème du moment cinétique (au contraire de  $m$ , constante, dans le théorème de la résultante).

Soit un référentiel-espace  $\mathcal{R}''$  tel que

$$\forall(\vec{\mu} : [t_1, t_2] \rightarrow E, \frac{d''\vec{\mu}}{d\bullet} = 0), \frac{d''}{d\bullet}(J_S\vec{\mu}) = 0.$$

Autrement dit, on demande que la matrice mobile de  $J_S$  dans une base de  $\mathcal{R}''$  soit constante ( $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}'$  convient, mais n'est peut-être pas la seule possibilité), de telle sorte que

$$\frac{d''}{d\bullet}(J_S\vec{\omega}') = J_S \frac{d''\vec{\omega}'}{d\bullet}. \quad (4.20)$$

Le théorème ?? dans le théorème du torseur cinétique donne les équations d'Euler :

$$m \frac{d''\vec{v}_G}{d\bullet} + \vec{\omega}'' \times m\vec{v}_G = \vec{F}_{\text{ext}}, \quad (4.21)$$

$$\forall(S \in \mathcal{R}', \vec{r}_G' \times \vec{\gamma}_S = 0), J_S \frac{d''\vec{\omega}'}{d\bullet} + \vec{\omega}'' \times J_S\vec{\omega}' = \vec{\Gamma}_{S,\text{ext}}. \quad (4.22)$$

Pour un solide possédant un plan propre d'inertie, on choisit  $\vec{E}_3$  normal au plan propre d'inertie, puis  $\mathcal{R}''$  nodal, si bien que  $\vec{\omega}''$  est la vitesse de précession-nutation (4.7). On suppose la rotation propre assez rapide,

$$\vec{\omega}'' \ll \vec{\omega}', \quad \vec{\omega}' \approx \dot{\varphi} \vec{E}_3, \quad J_S\vec{\omega}' \approx J_{3,S}\vec{\omega}'. \quad (4.23)$$

En outre, le référentiel-espace nodal ne voit pas la nutation ni la rotation propre, si bien que  $d_t'' \approx \dot{\psi}$ .

Si  $\vec{\omega}'' \ll d_t''$ , alors  $d_t \approx d_t''$  (thé. ??), et

$$m \frac{d''\vec{v}_G}{d\bullet} \approx \vec{F}_{\text{ext}}, \quad J_{3,S} \frac{d''\vec{\omega}'}{d\bullet} \approx \vec{\Gamma}_{S,\text{ext}}.$$

Cette approximation décrit un mouvement en rotation autour d'une direction quasi-constante, c'est le cas bidimensionnel.

Si au contraire  $\vec{\omega}'' \gg d_t''$ , alors  $d_t \approx \vec{\omega}'' \times \cdot$  et

$$\vec{\omega}'' \times m\vec{v}_G \approx \vec{F}_{\text{ext}}, \quad \vec{\omega}'' \times J_{3,S}\vec{\omega}' \approx \vec{\Gamma}_{S,\text{ext}},$$

décrivant les effets gyroscopiques : vitesse ou vitesse angulaire *orthogonale* à la résultante ou au moment dynamique, à l'encontre du sens commun (celui des rouleurs de troncs d'arbres).

Exercice. Expliquer le mouvement d'une toupie rapide, en admettant que la nutation soit constante. Dessiner  $\vec{\omega}''$ ,  $\vec{\omega}'$ ,  $\vec{\Gamma}$ .

Exercice. La Terre est aplatie aux pôles. En déduire que le Soleil exerce sur elle un moment dynamique non-nul en  $G$ , quand  $\theta \neq 0$ . Comparer  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ . Expliquer le mouvement terrestre. Justifier le signe de la vitesse de précession. Quelle est la différence avec la toupie ?

Les équations d'Euler aident à comprendre le mouvement des tourbillons dans un écoulement, en considérant un tourbillon comme un petit solide de révolution. On appelle d'ailleurs aussi équation d'Euler l'équation (aux dérivées partielles) déterminant la vorticité,  $2\vec{\omega}'$ , d'un mouvement fluide isovolume et sans frottement. De plus, toute voilure portante (aile d'avion, voile), crée autour d'elle un tourbillon (théorème de Kutta-Joukowski).

Les équations d'Euler aident à comprendre le pilotage des machines tournantes (gyroscope, perceuse, motorcycle, centrifugeuse) ou à voilure portante (planeur, voilier), ou combinant les deux caractères (hélicoptère, avion monomoteur, turbovoile), et la balistique (canon rayé, football, golf, freesbee, boomerang...).

Les termes en  $d_t''$  dans les équations d'Euler ne peuvent plus être négligés dans le cas d'un solide isolé,  $\vec{\Gamma}_{\text{ext}} = 0$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen. On choisit  $S = G$ ,  $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}'$ , puisqu'aucun autre point ou référentiel-espace ne se distingue.

$$\frac{d'\vec{v}_G}{d\bullet} = -\vec{\omega}' \times \vec{v}_G, \quad \vec{\omega}' \times J_{3,G}\vec{\omega}' = -J_G \frac{d'\vec{\omega}'}{d\bullet}.$$

On retrouve tout d'abord le théorème ??, puisque  $-\vec{\omega}' = \vec{\omega}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ , puis une équation gyroscopique dont trois solutions évidentes sont les mouvements à vitesse angulaire constante autour des axes propres d'inertie ( $G, \vec{E}_i$ ). De plus, si  $J_G$  est homothétique (trois valeurs propres confondues), alors

$$\frac{d'\vec{\omega}'}{d\bullet} = 0.$$

Le mouvement de précession libre est  $t \mapsto \vec{\omega}'$  dans  $\mathcal{R}'$ . La Terre, légèrement aplatie ( $J_3 > J_1, J_2$ ), précesse librement, avec une amplitude angulaire de l'ordre de  $10^{-7}$  et une période de l'ordre d'un an [13, 5-6].



# Chapitre 5

## Mécanique fonctionnelle

### 5.1 Des contraintes cinématiques aux coordonnées adaptées

Soit un espace affine  $\mathcal{E}$  sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ ,  $O \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on définit la position, la vitesse et l'accélération généralisées

$$r = \overrightarrow{OM}, \quad v = \dot{r}, \quad \gamma = \dot{v}. \quad (5.1)$$

et le mouvement généralisé

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &\rightarrow (E, E) \\ t &\mapsto (r, v). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Une phase libre est un couple position-vitesse généralisées  $(r, v) \in (E, E)$ , espace vectoriel de dimension  $2n$ .

**Définition 5.1** (fonction du mouvement). *Une fonction du mouvement est un produit de composition*

$$t \mapsto (t, r[t], v[t]) \mapsto q(t, r[t], v[t]),$$

– scléronome (*contraire : rhéonome*), si

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, r, v) = 0,$$

– cyclique, si

$$\frac{\partial q}{\partial r}(t, r, v) = 0,$$

FIG. 5.1 – Un point contraint à glisser sur un cercle

– holonome<sup>1</sup>, si

$$\frac{\partial q}{\partial v}(t, r, v) = 0, \quad (5.3)$$

– rectiligne si  $q$  est holonome et affine en  $r$ ,

$$q = \beta r + q_0, \quad (r, v) \mapsto (\beta, q_0)(t, r, v) = \text{cst.} \quad (5.4)$$

– cartésienne si  $q$  est rectiligne et scléronome,

$$q = \beta r + q_0, \quad (\beta, q_0)(t, r, v) = \text{cst.} \quad (5.5)$$

– constante (a posteriori) ou contrainte (a priori), si

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial r}v + \frac{\partial q}{\partial v}\gamma = 0. \quad (5.6)$$

– intégrable s'il existe une primitive holonome  $p$ , telle que

$$\dot{p}(t, r) = q(t, r, v).$$

Toute contrainte holonome donne, par dérivation, une contrainte non-holonome, donc linéairement indépendante de sa primitive dans l'espace des phases. Inversement, toute contrainte non-holonome intégrable donne, par intégration, une contrainte holonome, linéairement indépendante de sa dérivée. Le théorème 2.41 fournit un critère d'intégrabilité d'une fonction du mouvement dépendant linéairement de la vitesse.

Soit un entier naturel  $c \leq n$  et un instant  $t$ .  $c$  contraintes holonomes déterminent une variété différentiable *support* du mouvement  $\mathcal{S}[t] \subset \mathcal{E}$ ,

$$M[t] \in \mathcal{S}[t], \quad v[t] \parallel \mathcal{S}[t]. \quad (5.7)$$

Le nombre de degrés de liberté du mouvement ainsi contraint est la dimension  $n - c$  du support (ou du sous-espace tangent local). Exemple. Pour le

---

<sup>1</sup>Du grec holo-, entier, ici au sens de intégral.

mouvement d'un point sur un cercle (fig. 5.1), les contraintes sont  $z = 0$  et  $\vec{r}_M \cdot \vec{v}_M = 0$ , non-holonyme mais intégrable :

$$\vec{r}_M \cdot \vec{v}_M = x\dot{x} + y\dot{y} = D(x^2 + y^2),$$

d'où la détermination *analytique* du support dans  $\mathcal{E}$ ,  $R$  étant le rayon du cercle :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

$(r, v)$  peut être plongé dans  $\mathbb{R}^{2n}$  par divers systèmes de coordonnées, fonctions du mouvement, à commencer par des coordonnées cartésiennes contravariantes  $x^i$ ,  $i = 1 \dots n$ . On propose également un système de coordonnées holonomes contravariantes  $q^j$ ,  $j = 1 \dots n$ , telles que, pour tout instant  $t$ ,

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^{(n)} \\ r &\mapsto q(t, r), \end{aligned} \quad (5.8)$$

soit un difféomorphisme, et *adaptées aux contraintes*, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S}[t] = \{M \in \mathcal{E}, \forall j > n - c, \exists q^{j*}, \forall t, q^j(t, r) = q^{j*}, \dot{q}^j(t, r) = 0\}. \quad (5.9)$$

Exemple : les coordonnées géographiques, latitude et longitude, définissent un difféomorphisme sur la sphère (moins les pôles), espace courbe de dimension deux. Et sur la surface terrestre réelle? (Aide : voir le Bec de l'Aigle à La Ciotat.)

Pour décrire le mouvement, on dispose des phases libres  $(r, v)$ , ou  $(x^i, \dot{x}^i)$ ,  $i = 1 \dots N$ , ou  $(q^j, \dot{q}^j)$ ,  $j = 1 \dots N$ . En général, les coordonnées  $q^j$  sont curvilignes (non-rectilignes), autrement dit le difféomorphisme (5.8) n'est pas une application affine, si bien que le support est une variété différentiable de  $\mathcal{E}$ , non-affine, de dimension  $n - c$  (celle du sous-espace vectoriel tangent).

Les coordonnées  $q^j$ ,  $j > n - c$  sont par contrainte des constantes du mouvement, et non plus des variables dynamiques. En tout point du support,  $(E_j)$  étant la base locale des  $q^j$ , on définit la projection sur le sous-espace tangent au support :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E \\ r &= \sum_{j=1 \dots n} q^j E_j \mapsto \tilde{r} = \sum_{j=1}^{n-c} q^j E_j. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pour décrire le mouvement, il suffit en réalité des phases contraintes  $(\tilde{r}, \tilde{v})$ , ou  $(q^j, \dot{q}^j)$ ,  $j \leq n - c$ .

D'après (5.8, 5.6, 5.3),

$$\dot{q}^j[t] = \frac{\partial q^j}{\partial t}(t, x^k) + \frac{\partial q^j}{\partial x^i}(t, x^k)\dot{x}^i[t], \quad j = 1 \dots n. \quad (5.11)$$

Cependant, pour remplacer les coordonnées cartésiennes, on utilise le difféomorphisme réciproque et sa matrice jacobienne,

$$\alpha_j^i(t, q^k) = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}(t, q^k). \quad (5.12)$$

Réciproquement à (5.11),

$$\dot{x}^i[t] = \frac{\partial x^i}{\partial t}(t, q^k) + \alpha_j^i(t, q^k)\dot{q}^j[t]. \quad (5.13)$$

En dérivant par rapport à  $\dot{q}^j$ , on trouve que les coordonnées de vitesse varient comme (ont la même matrice jacobienne que) les coordonnées de position :

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j}(t, q^k) = \alpha_j^i(t, q^k) = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}(t, q^k)}, \quad j = 1 \dots n. \quad (5.14)$$

## 5.2 De l'accélération à l'énergie cinétique

L'espace vectoriel  $E$  muni de la forme scalaire  $(r_1, r_2) \mapsto \langle r_1, r_2 \rangle$  est euclidien. La masse généralisée est  $r \mapsto m$ ,  $\forall r$ ,  $m(r)$  est un opérateur sur  $E$ , linéaire, symétrique, défini positif. La quantité de mouvement  $P$  et la force généralisées  $F$  sont des fonctions du mouvement,

$$P(r, v) = m(r)v, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad \dot{P}[t] = F(t, r, v). \quad (5.15)$$

Remarque.  $P$  est une primitive scléronome de  $F$ .

$m(r)$ , opérateur linéaire symétrique, est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  dans une base orthonormale et, en coordonnées dans cette base, (5.15) devient

$$\forall i, \quad m_i(r)\ddot{x}_i[t] = X_i(t, r, v), \quad m_i(r) > 0. \quad (5.16)$$

Les coordonnées adaptées covariantes de  $\dot{P}, F$  sont

$$\dot{P}_j[t] = \alpha_j^i(t, r)m_i(r)\ddot{x}_i[t], \quad Q_j(t, r, v) = \alpha_j^i(t, r)X_i(t, r, v). \quad (5.17)$$

et, en coordonnées adaptées, (5.15) devient

$$\dot{P}_j[t] = Q_j(t, r, v), \quad j \leq n - c, \quad 0 = Q_j = P_j, \quad j > n - c. \quad (5.18)$$

**Définition 5.2.** *L'énergie cinétique est la forme quadratique sur  $E$  (non-dégénérée positive comme  $m(r)$ ) :*

$$(r, v) \mapsto T(r, v) = \frac{1}{2} \langle v, m(r)v \rangle = \frac{1}{2} \dot{x}^i m_i(r) \dot{x}_i = \frac{1}{2} m_i(r) \dot{x}^i \dot{x}^i. \quad (5.19)$$

En utilisant (5.14), et en remarquant que  $d_t$  commute avec n'importe quelle dérivée partielle, (d'Alembert)

$$\begin{aligned} \alpha_j^i m_i \ddot{x}_i &= D(\alpha_j^i m_i \dot{x}_i) - \dot{\alpha}_j^i m_i \dot{x}_i, \\ &= D\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} m_i \dot{x}_i\right) - \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} m_i \dot{x}_i, \\ &= \left(D \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial}{\partial q^j}\right) \left(\frac{1}{2} \dot{x}^i m_i \dot{x}_i\right), \\ \dot{P}_j &= D \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j}. \end{aligned}$$

D'où les équations de Lagrange,

$$**dt \frac{d}{dt} (p_j[t] = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}[t]) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j, \quad j \leq n - c. \quad (5.20)$$

Sous forme invariante :

$$\frac{d}{dt} (\tilde{p}[t] = \frac{\partial T}{\partial \tilde{v}}[t]) - \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} = \tilde{F}.$$

La variable *conjuguée* de  $\tilde{v}$  pour la fonction  $T$  ou l'*impulsion* généralisée est  $\tilde{p}$ , coïncidant avec la quantité de mouvement projetée  $\tilde{P}$  si et seulement si l'accélération de courbure  $\partial_{\tilde{r}} T$  est nulle, si et seulement si les coordonnées  $q^j$ ,  $j \leq n - c$  sont rectilignes.

Pour déterminer le mouvement, on a besoin d'une phase initiale  $(\tilde{r}, \tilde{v})$  et d'une loi de force tangente. En particulier,  $\tilde{F} = 0$  conduit au mouvement *géodésique*, généralisant le mouvement rectiligne uniforme à un espace courbe.

Le mouvement étant connu, on peut en déduire, par le théorème du torseur cinétique, la force complémentaire  $F - \tilde{F}$ , de coordonnées  $Q_j$ ,  $j > n - c$ , qui maintient le point sur le support. D'après le principe d'action-réaction, le support encaisse la force opposée.

En coordonnées scléronomes, le changement de coordonnées de vitesse (5.13), devient linéaire

$$\dot{x}^i[t] = \alpha_j^i(q^k) \dot{q}^j[t], \quad (5.21)$$

et l'énergie cinétique (5.19) est une forme quadratique des  $\dot{q}^j$ , avec des coefficients  $T_{k,l}$  dépendant du point comme les  $\alpha_j^i$  :

$$T = \frac{1}{2} T_{k,l}(q^j) \dot{q}^k \dot{q}^l, \quad T_{k,l} = m_i \alpha_k^i \alpha_l^i. \quad (5.22)$$

En remplaçant (5.22) dans (5.20) :

$$\boxed{T_{k,j}\ddot{q}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{k,l}}{\partial q^j} \dot{q}^k \dot{q}^l = Q_j}, \quad j \leq n - c. \quad (5.23)$$

L'adaptation des coordonnées aux contraintes se paye par la non diagonalité de la matrice de masse  $T_{k,l}(q^j)$ , qui demeure néanmoins symétrique et inversible, ce qui garantit *a priori* que (5.23) est un système d'équations différentielles bien posé.

Remarque. Une énergie cinétique ou une équation du mouvement, qui, en coordonnées holonomes scléronomes, n'est pas de la forme (5.22, 5.23), est fautive. En particulier, la matrice de masse doit être symétrique et de déterminant non-nul.

### 5.3 De la force à l'énergie potentielle

Le *travail* virtuel de la force  $F$ , pour un petit déplacement  $dr$ , est la forme différentielle

$$\delta W = \langle F, dr \rangle. \quad (5.24)$$

**Définition 5.3** (potentiel, énergie potentielle). *Un potentiel est une fonction du mouvement  $V$  telle que*

$$\forall t, \forall dr \parallel \mathcal{S}[t], \quad \delta W = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial r}(t, r, v), dr \right\rangle + \delta W', \quad (5.25)$$

total si  $\delta W' = 0$ . Une énergie potentielle est un potentiel scléronome holonome.

Avec une énergie potentielle,

$$\forall dr \parallel \mathcal{S}, \quad \delta W = -\left\langle \frac{dV}{dr}(r), dr \right\rangle + \delta W' = -dV + \delta W'. \quad (5.26)$$

$\delta W$  est une différentielle totale sur  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire,  $\exists V$ ,  $\delta W = -dV$ ,  $\delta W' = 0$  si et seulement si (thé. 2.41)

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q^i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q^j}, \quad j \leq n - c.$$

**Définition 5.4** (fonction de dissipation). *Rayleigh propose un modèle fonctionnel de frottement, en postulant une fonction de dissipation  $\Phi$ ,*

$$\delta W' = -\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}(t, r, v), dr \right\rangle + \delta W''. \quad (5.27)$$

**Théorème 5.1** (de l'énergie cinétique). *Si la masse est cyclique, c'est-à-dire  $m(r) = \text{cst}$ , alors*

$$\dot{T} = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \langle F, v \rangle.$$

*Démonstration.*  $m(r)$  étant linéaire et symétrique,

$$\begin{aligned} 2\left\langle \frac{\partial T}{\partial v}, dv \right\rangle &= \langle v + dv, m(v + dv) \rangle - \langle v, mv \rangle = \langle dv, mv \rangle + \langle v, mdv \rangle, \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial v}, dv \right\rangle &= \langle mv, dv \rangle, \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= mv. \end{aligned} \tag{5.28}$$

(Alternativement, on invoque l'identité d'Euler sur la fonction homogène de degré deux énergie cinétique.)

Avec (3.17),

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt}[t] = \left\langle \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{dv}{dt}[t] \right\rangle = \langle mv, \gamma \rangle = \langle F, v \rangle = \frac{\delta W}{dt} = \mathcal{P}.$$

□

Remarque. Alors que  $\delta W$  était un travail virtuel,  $\mathcal{P}dt$  est un travail réel, en mouvement. Le théorème de l'énergie cinétique est donc un « théorème des travaux réels ».

Avec une énergie potentielle et une fonction de dissipation,

$$\frac{d}{dt}(T + V)(t) = \mathcal{P}'(t) = \lim \frac{\delta W'}{dt} = -\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, v \right\rangle + \mathcal{P}'', \quad \mathcal{P}'' = \frac{\delta W''}{dt} \tag{5.29}$$

Si  $\mathcal{P}' = 0$ , alors l'énergie totale  $T + V$  est une constante du mouvement. Si de plus  $\mathcal{P}'' = 0$  alors le mouvement est *idéal*. Sinon, la puissance de forçage  $\mathcal{P}'' \neq 0$  compense exactement la puissance de frottement, le mouvement est en régime permanent. Exemple : le mouvement des planètes est quasi-idéal, le mouvement d'une montre est un mouvement non-idéal en régime permanent.

## 5.4 Équations sur la fonction de Lagrange

**Théorème 5.2** (des travaux virtuels). *Soit des forces  $F', F''$ , de coordonnées adaptées  $Q'_j, Q''_j$ , telles que, pour tout déplacement virtuel  $dr \parallel \mathcal{S}$ ,*

$$\delta W' = \langle F', dr \rangle, \quad \delta W'' = \langle F'', dr \rangle,$$

Alors,  $Q'_j, Q''_j, j \leq n - c$ , s'annulent respectivement avec  $\delta W', \delta W''$ , reliés à  $V, \Phi$  par (5.25, 5.27), et

$$\begin{aligned}\forall j \leq n - c, Q_j &= -\frac{\partial V}{\partial q^j} + Q'_j, \\ Q'_j &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} + Q''_j.\end{aligned}$$

(D'Alembert.)

*Démonstration.* La forme scalaire étant non-dégénérée, si  $\delta W'$  est nul pour tout  $dr \in E$ , alors  $F' = 0$ . Mais, l'hypothèse étant plus faible, on peut seulement affirmer

$$\tilde{F}' = 0, \quad Q'_j = 0, \quad j \leq n - c. \quad (5.30)$$

D'après (5.25, 5.27)

$$\begin{aligned}\langle F, dr \rangle &= -\left\langle \frac{\partial V}{\partial r}, dr \right\rangle + \langle F', dr \rangle, \\ \langle F', dr \rangle &= -\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, dr \right\rangle + \langle F'', dr \rangle.\end{aligned}$$

On utilise comme précédemment la non-dégénérescence de la forme scalaire.  $\square$

Remarque. Les différents travaux et leurs expressions. De (5.24, 5.25, 5.27, 5.14), pour tout déplacement virtuel  $dr \parallel \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned}\langle F, dr \rangle &= \sum_{i=1 \dots n} X_i dx^i = \sum_{j=1}^{n-c} Q_j dq^j, \\ \left\langle \frac{\partial V}{\partial r}, dr \right\rangle &= \sum_{i=1 \dots n} \frac{\partial V}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^{n-c} \frac{\partial V}{\partial q^j} dq^j, \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, dr \right\rangle &= \sum_{i=1 \dots n} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i} dx^i = \sum_{j=1}^{n-c} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} dq^j.\end{aligned}$$

Grâce au théorème des travaux virtuels, (5.20) devient

$$\begin{aligned}\forall j \leq n - c, \dot{p}_j - \frac{\partial T}{\partial q^j} &= -\frac{\partial V}{\partial q^j} + Q'_j, \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q^j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} + Q''_j.\end{aligned} \quad (5.31)$$

La fonction de Lagrange ou *lagrangien*

$$\boxed{L = T - V}, \quad (5.32)$$

« absorbe » le potentiel :

$$\begin{aligned} \dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q^j} &= Q'_j, \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} + Q''_j, \quad j \leq n - c. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Sans frottement, et avec  $L, Q''$  scléronomes, (5.33) est invariante par translation et renversement du temps, c'est-à-dire

$$q^j[t] \text{ solution} \Leftrightarrow q^j(\tau - t) \text{ solution.}$$

Exercice : montrer que  $\Phi$  rompt en général cette symétrie.

Si  $V$  est une énergie potentielle, alors on peut exprimer jusqu'à  $p_j$  en fonction du lagrangien, de manière quelque peu artificielle :

$$\begin{aligned} \forall j \leq n - c, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}[t] - \frac{\partial L}{\partial q^j}[t] &= Q'_j[t], \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} + Q''_j. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Si de plus  $V$  est total,  $\delta W = -dV$ ,  $\delta W' = 0$ , alors, d'après le théorème des travaux virtuels,  $Q'_j = 0$ , et on obtient une équation sur la seule fonction de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}[t] - \frac{\partial L}{\partial q^j}[t] = 0, \quad j \leq n - c. \quad (5.35)$$

En outre, le forçage compense exactement (dans le sous-espace tangent) le frottement,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} + Q''_j = 0, \quad j \leq n - c, \quad (5.36)$$

Si  $\forall j \leq n - c$ ,  $Q''_j \dot{q}^j = 0$ , alors le mouvement est idéal, sinon il est en régime permanent.

## 5.5 Equations sur la fonction de Hamilton

Le but est d'obtenir une équation différentielle autonome, de la forme  $\dot{x} = f(t, x)$ , qui soit équivalente à (5.34). On y parvient, par un nouveau changement de variable,  $(\tilde{r}, \tilde{v}) \mapsto (\tilde{r}, \tilde{p})$ , en éliminant  $\tilde{v}$  par transformation

de Legendre. Plus précisément, la fonction de Hamilton ou *hamiltonien* est la transformée de Legendre de  $L$ ,

$$H = \langle v, p \rangle - L(t, r, v) = \dot{q}^j p_j - L(t, q^j, \dot{q}^j). \quad (5.37)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} d\dot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial t} dt + (\dot{p}_j - Q'_j) dq^j + p_j d\dot{q}^j, \\ d\langle v, p \rangle &= p_j d\dot{q}^j + \dot{q}^j dp_j, \\ dH &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - (\dot{p}_j - Q'_j) dq^j + \dot{q}^j dp_j, \end{aligned}$$

où on lit les variables naturelles  $H(t, r, p)$  ou  $H(t, q^j, p_j)$  et les équations sur la fonction de Hamilton,

$$\forall j \leq n - c, \quad \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} + Q'_j, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (5.38)$$

qui (sans la dernière) forment une équation différentielle autonome du premier ordre dans  $\mathbb{R}^{2(n-c)}$ .

## 5.6 Constantes du mouvement

Le hamiltonien serait-il une constante du mouvement ? On calcule  $\dot{H}$ , avec (5.34) (pour la troisième ligne) et la troisième équation de Hamilton (5.38) (à la fin) :

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \right) [t] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j, \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} + Q'_j \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j, \\ \dot{L} + Q'_j \dot{q}^j &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} (\dot{q}^j p_j), \\ Q'_j \dot{q}^j &= \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{H}, \\ \dot{H} &= -\frac{\partial L}{\partial t} + Q'_j \dot{q}^j, \\ \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{P}', \end{aligned} \quad (5.39)$$

où le détail de  $\mathcal{P}'$  est donné par (5.29).

Soit un mouvement conservant le hamiltonien,  $\dot{H} = 0$ . On distingue alors le cas idéal, où aucune force ne travaille (hormis celles implicites dans le hamiltonien),  $\partial_t H = \mathcal{P}' = 0$ , et le cas contraire, celui du régime permanent non-idéal. Exercice : décrire le bilan hamiltonien dans la manipulation du *Botafumeiro* de Saint-Jacques de Compostelle.

**Théorème 5.3.** *Si  $\tilde{v} \mapsto T(\tilde{r}, \tilde{v})$  est une forme quadratique, alors  $H = T + V$ .*

*Démonstration.* De (5.28, 5.37), et en tenant compte des contraintes,

$$\begin{aligned} \langle p, v \rangle &= \langle \tilde{p}, \tilde{v} \rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial \tilde{v}}, \tilde{v} \right\rangle = \langle m\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = 2T(\tilde{r}, \tilde{v}), \\ H(t, \tilde{r}, \tilde{v}) &= 2T - (T - V) = T(\tilde{r}, \tilde{v}) + V(t, \tilde{r}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

□

**Théorème 5.4.** *Un lagrangien partiellement cyclique donne une constante du mouvement :*

$$\forall j, \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \Rightarrow p_j[t] = \text{cst} \right).$$

*Démonstration.* Intégrer (5.35) sur l'intervalle de temps. □



# Chapitre 6

## Mécanique fonctionnelle des solides

### 6.1 Mouvement d'un corps massif

Soit une famille de point mobile massif  $M_k : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $m_k$ ,  $k = 1 \dots N$  et  $\vec{e}_i$  une base orthonormale de  $E$ . On veut appliquer la théorie de Lagrange au mouvement massif généralisé  $t \mapsto (r, v = \dot{r}), m'$ ,

$$\begin{aligned} M &= (M_k, k = 1 \dots N) \in \mathcal{E} = \mathcal{E}^N, \\ r &= (\vec{r}_k, k = 1 \dots N) \in E = E^N, \\ \vec{r}_k &= \overrightarrow{OM_k} = x^{k,1}\vec{e}_1 + x^{k,2}\vec{e}_2 + x^{k,3}\vec{e}_3 \in E, \\ (x^i, i = 1 \dots 3N) &= ((x^{k,1}, x^{k,2}, x^{k,3}), k = 1 \dots N), \\ (m'_i, i = 1 \dots 3N) &= ((m_k, m_k, m_k), k = 1 \dots N). \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  est un espace affine euclidien, d'origine ( $O \dots O$ ) sur l'espace vectoriel  $E$  de dimension  $3N$ , muni de la forme quadratique (déf. 1.61)

$$(r, r) \mapsto \langle r, r \rangle = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \cdot \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{3N} x^i x_i.$$

En l'absence de contrainte, les coordonnées cartésiennes sont adaptées.

Énergie cinétique et travail virtuel :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 = \sum_{i=1}^{3N} m'_i \dot{x}^i \dot{x}^i, \quad \delta W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = \sum_{i=1}^{3N} F^i \dot{x}^i.$$

(5.20) identifie l'impulsion et la quantité de mouvement, puis restitue (3.48) par composante :

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} = m'_j \dot{x}^j, \quad \dot{p}_j = m'_j \ddot{x}^j = F_j.$$

Soit un potentiel  $V$ . Le principe d'action-réaction équivaut à l'existence de potentiels extérieur  $V_k$  et de potentiels intérieur  $V_{k,l}$  radiaux, tels que

$$V = \left( \sum_{1 \leq k \leq N} V_k(\vec{r}_k) \right) + \sum_{1 \leq k < l \leq N} V_{k,l}(r_{kl}). \quad (6.1)$$

Le principe de relativité dynamique demande que les  $V_k, V_{k,l}$  soient indépendants du référentiel-espace. Exercice : montrer (3.3) sur (6.1).

Exemples.

– Énergies potentielles d'un champ gravitationnel extérieur uniforme :

$$V_1 = -m_1 \vec{g}[t] \cdot \vec{r}_1, \quad V_2 = -m_2 \vec{g}[t] \cdot \vec{r}_2.$$

– Énergie potentielle gravitationnelle intérieure :

$$V_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}.$$

Voici l'ordre de grandeur du rapport des forces mutuelles sur les forces extérieures, pour deux corps de taille  $r$  et de masse  $m$ , à la surface de la Terre de taille  $R$  et de masse  $M$ , en supposant que ces corps aient à peu près la même masse volumique que la Terre :

$$\frac{\nabla V_{12}}{\nabla V_1} \approx \frac{m^2}{r^2} \frac{R^2}{mM} = \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2} \leq \frac{r^3}{R^3} \frac{R^2}{r^2} = \frac{r}{R} \ll 1.$$

Les forces gravitationnelles intérieures sont presque toujours négligeables, par rapport aux forces extérieures, pour le mouvement de corps petits par rapport à la Terre.

## 6.2 Mouvement d'un solide massif

Soit un mouvement solide massif  $t \mapsto ((\vec{r}_i, \vec{v}_i), i = 1 \dots N)$ , de mesure de masse  $\rho$ , et un référentiel-espace  $\mathcal{R}'$ ,  $(M_i) \in \mathcal{R}'$ .

### Énergie cinétique

D'après (5.19, 3.25, déf. 4.1, déf. 3.33, 4.13),  $\forall S \in \mathcal{R}'$ ,  $\vec{r}' = \overrightarrow{SM}$ ,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_S + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_i, \\ v_i^2 &= v_S^2 + 2 \det(\vec{v}_S, \vec{\omega}', \vec{r}'_i) + (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)^2, \\ (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)^2 &= \vec{\omega}' \cdot (\vec{r}'_i \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)) = \vec{\omega}' \cdot \mathcal{J}(\vec{r}'_i) \vec{\omega}', \\ T &= \frac{1}{2} m v_S^2 + m \det(\vec{v}_S, \vec{\omega}', \vec{r}'_G) + \frac{1}{2} \vec{\omega}' \cdot J_S \vec{\omega}'. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Les mouvements de rotation autour d'un axe propre d'inertie  $^{***}$ , passant par  $S^{***}$ , sont tels que  $\forall i = 1, 2, 3, 2T = J_{i,S}\omega'^2 \geq 0$ , donc les valeurs propres d'inertie sont partout positives,  $J_{i,S} \geq 0$ .

Pour simplifier, on choisit  $S = G$ , d'où la position généralisée et la vitesse généralisée :

$$r = (\vec{r}_G, \vec{\phi}) \in \mathbb{R}^6, \quad v = \dot{r} = (\vec{v}_G, \vec{\omega}'). \quad (6.3)$$

La fonction énergie cinétique est déduite de (6.2) :

$$T(\vec{r}_G, \vec{\phi}, \vec{v}_G, \vec{\omega}') = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}' \cdot J_G \vec{\omega}'. \quad (6.4)$$

$T$  est quadratique en  $\vec{v}_G, \vec{\omega}'$  et cyclique, donc, en l'absence de forces extérieures, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont deux constantes du mouvement.

L'énergie cinétique giratoire peut être exprimée en fonction des angles d'Euler (4.10) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\omega}' \cdot J_S \vec{\omega}' = & \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi)^2 + \\ & \frac{1}{2}J_2(-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Avec un plan propre d'inertie, il existe et on choisit  $\vec{E}_3$  normal à celui-ci,

$$J = J_1 = J_2, \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}' \cdot J_S \vec{\omega}' = \frac{1}{2}J(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \quad (6.7)$$

Exercice : retrouver (6.7) à partir de (6.5, 6.6).

## Travail virtuel

$$\delta W = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} \cdot dM_j = \left( \sum_i \vec{F}_{i,i} \cdot dM_i \right) + \sum_{i < j} (\vec{F}_{i,j} \cdot dM_j + \vec{F}_{j,i} \cdot dM_i).$$

Mais, d'après le principe d'action-réaction et l'équiprojectivité, seules les forces extérieures travaillent :

$$\vec{F}_{i,j} \cdot \vec{v}_j + \vec{F}_{j,i} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_{i,j} \cdot \vec{v}_{i,j} \propto \vec{r}_{i,j} \cdot \vec{v}_{i,j} = 0. \quad (6.8)$$

Remarque.  $\vec{r}_{i,j} \cdot \vec{v}_{i,j} = 0$  est une contrainte cinématique non-holonome, intégrable en (3.24).

Exercice. Quel sont les avantages d'un cadre de bicyclette en carbone? Et une raquette de tennis?

Avec (\*\*\*, 6.8) et le vecteur orientation ou position angulaire  $\vec{\phi} = \int \vec{\omega}' dt$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_i \vec{F}_{i,i} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G + \vec{\Gamma}_{G,ext} \cdot \vec{\omega}', \\ \delta W &= \vec{F}_{ext} \cdot dG + \vec{\Gamma}_{G,ext} \cdot d\vec{\phi}. \end{aligned}$$

$\vec{\phi}$  hérite du paramétrage de  $\vec{\omega}'$ . D'après (4.8), la base locale des angles d'Euler est la base oblique d'Euler :

$$\begin{aligned} d\vec{\phi} &= \vec{e}_\theta d\theta + \vec{e}_\psi d\psi + \vec{e}_\varphi d\varphi, \\ \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \psi} = \vec{e}_\psi, \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

reliée aux  $(\vec{e}_i)$  par (4.1), qui donne la matrice jacobienne réciproque  $\alpha_j^i$  (5.12, 3.11), par exemple,  $\alpha_\varphi^2 = -\sin \theta \cos \psi$ , permettant d'exprimer les coordonnées covariantes de  $\vec{\Gamma}_{G,ext}$  dans la base d'Euler, en fonction de ses coordonnées dans  $(\vec{e}_i)$ .

Avec un potentiel,

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_G} \cdot dG - \frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}} \cdot d\vec{\phi} + \delta W', \\ \delta W' &= \vec{F}'_{ext} \cdot dG + \vec{\Gamma}'_{G,ext} \cdot d\vec{\phi}. \end{aligned}$$

Quelques énergies potentielles :

- Énergie potentielle d'un champ gravitationnel extérieur uniforme :

$$V = -\sum_i m_i \vec{g}[t] \cdot \vec{r}_i = -\int dM \rho(t, M) \vec{g}[t] \cdot \vec{r} = -m \vec{g}[t] \cdot \vec{r}_G.$$

- Énergie potentielle d'une force de rappel linéaire (ressort étiré de  $x$ ) :

$$V = \frac{1}{2} k x^2.$$

- Énergie potentielle d'un couple de rappel linéaire (barre tordue de  $\varphi$ ) :

$$V = \frac{1}{2} k \varphi^2.$$

FIG. 6.1 – Le mouvement de Lagrange-Poisson

## Équations de Lagrange

On écrit (5.20), groupées par trois, en utilisant la différentielle (5.28).

$$p_{\vec{v}_G} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_G} = m\vec{v}_G, \quad (6.9)$$

$$p_{\vec{\omega}'} = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}'} = \frac{\partial}{\partial \vec{\omega}'} \left( \frac{1}{2} \vec{\omega}' \cdot J_G \vec{\omega}' \right) = J_G \vec{\omega}'. \quad (6.10)$$

L'accélération de courbure  $\partial_r T$  est nulle. On retrouve le théorème du moment cinétique solide en  $G$  :

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\vec{v}_G} &= m\vec{\gamma}_G = \vec{F}_{\text{ext}}, \\ \dot{p}_{\vec{\omega}'} &= \frac{d}{dt} (J_G \vec{\omega}') = \vec{\Gamma}_{S,\text{ext}}. \end{aligned}$$

## 6.3 Gyroscope

### Lagrangien

Soit un solide, de référentiel-espace  $\mathcal{R}'$ , avec un plan propre d'inertie de normale  $\vec{E}_3$ , pivotant autour de  $S$  \*\*\* et soumis à un champ de gravité uniforme :

$$S \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}', \quad \vec{r}'_G = \overrightarrow{SG} = l\vec{E}_3, \quad \vec{g} = -g\vec{e}_3.$$

Exemples : une toupie à pointe \*\*\* ; un gyroscope à cardan déséquilibré (en négligeant l'inertie du cadre).

$S$  étant \*\*\*, il reste trois degrés de liberté, représentés par les trois angles d'Euler  $\psi, \theta, \varphi$ . D'après (6.7, 6.6),

$$T = \frac{1}{2} J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_\varphi (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 - mgl \cos \theta.$$

La seule force contribuant au travail virtuel est le poids, à l'exclusion de la réaction du support, dont le point d'application  $S$  est \*\*\*. Il existe une énergie potentielle totale,

$$V = -m\vec{g} \cdot \vec{r}_G = mgl \cos \theta,$$

(5.35) s'applique.  $T$  étant quadratique en  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ ,  $H = T + V$ . Exercice : montrer par symétrie que  $T, V$  sont cycliques par rapport à  $\psi, \varphi$ .

### Intégrales premières

$L$  est scléronome et cyclique par rapport à  $\psi, \varphi$ , d'où les constantes du mouvement ( $H, \omega_\psi, \omega_\varphi$ ) (déterminées par les conditions initiales) :

$$H = \frac{1}{2}J(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}J_3\omega_\varphi^2 + mgl \cos \theta. \quad (6.11)$$

$$J\omega_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J\dot{\psi} \sin^2 \theta + J_3\omega_\varphi \cos \theta, \quad (6.12)$$

$$J_3\omega_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_3(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}), \quad (6.13)$$

On veut vérifier les deux dernières constantes du mouvement par le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \vec{\Gamma}_S = \vec{r}'_G \times m\vec{g} = l\vec{e}_\varphi \times m(-g\vec{e}_3) = mgl \sin \theta \vec{e}_\theta. \quad (6.14)$$

Le moment cinétique est exprimé dans la base nodale, avec le théorème de l'opérateur d'inertie et (4.9) :

$$\vec{\sigma}_S = \begin{pmatrix} J\dot{\theta} & J\dot{\psi} \sin \theta & J_3\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

Donc

$$J_3\omega_\varphi = \vec{\sigma}_S \cdot \vec{e}_\varphi = \sigma_\varphi,$$

moment cinétique de rotation propre, et, avec (4.5),

$$J\omega_\psi = \vec{\sigma}_S \cdot \vec{e}_3 = \sigma_\psi,$$

moment cinétique de précession.

En projetant (6.14) sur la direction \*\*\*  $\vec{e}_3$ ,

$$J\dot{\omega}_\psi = 0.$$

$$J_3\dot{\omega}_\varphi = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_S \cdot \vec{e}_\varphi) = \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{e}_\varphi + \det(\vec{\sigma}_S, \vec{\omega}', \vec{e}_\varphi).$$

D'après (6.14),  $\vec{\Gamma}_S \cdot \vec{e}_\varphi = 0$ .

$$\det(\vec{\sigma}_S, \vec{\omega}', \vec{e}_\varphi) = \begin{vmatrix} J\Omega_1 & J\Omega_2 & J_3\Omega_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

FIG. 6.2 – Énergie potentielle unidimensionnelle effective de la toupie

### Allure du mouvement

On arrange (6.13, 6.12, 6.11), avec

$$u = \cos \theta, \quad \omega_g^2 = \frac{2mgl}{J}, \quad \alpha = \frac{J_3 \omega_\varphi}{J \omega_\psi}, \quad \beta = \frac{\omega_\psi^2}{\omega_g^2}, \quad u_1 = \frac{2H - J_3 \omega_\varphi^2}{J \omega_g^2} :$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi - \dot{\psi} u, \quad (6.15)$$

$$\frac{\dot{\psi}}{\omega_\psi} = \frac{1 - \alpha u}{1 - u^2}, \quad (6.16)$$

$$-\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_g^2} = V_\theta(\theta) = \beta \frac{(1 - \alpha u)^2}{1 - u^2} + u - u_1. \quad (6.17)$$

(6.17) est une équation différentielle du premier ordre, exprimant conservation de l'énergie totale du mouvement d'un point  $(\theta, \dot{\theta})$ , de masse effective  $2/\omega_g^2$ , soumis à l'énergie potentielle  $V_\theta$ . Après avoir résolu (6.17), on pourra obtenir  $\psi$  puis  $\varphi$  par (6.15, 6.16).

On peut même éliminer  $\theta$  dans (6.17) au profit de  $u$  :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}, \\ -\frac{\dot{u}^2}{\omega_g^2} &= V_u(u) = \beta(1 - \alpha u)^2 + (u - u_1)(1 - u^2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$V_u(\pm 1) > 0, \quad \lim_{\pm\infty} V_u = \mp\infty,$$

$$V_u(u) = -u^3 + (\alpha^2 \beta + u_1)u^2 - (2\alpha\beta - 1)u + \beta - u_1.$$

$V_u$  a deux racines dans  $[0, 1]$ ,  $u_1 = \cos \theta_1, u_2 = \cos \theta_2$ . Comme le membre gauche dans (6.18) est négatif,  $u \in [u_1, u_2]$ .

Sur (6.16), on distingue trois cas :

- $\alpha^{-1} \notin [u_2, u_1]$  : la précession est monotone, et la courbe  $(\theta, \psi)$  est ondulée (en première approximation, comme une trochoïde raccourcie) ;
- $\alpha^{-1} \in ]u_2, u_1[$  : la précession oscille, et la courbe  $(\theta, \psi)$  a des boucles (trochoïde allongée) ;
- $\alpha^{-1} \in \{u_2, u_1\}$  : la courbe  $(\theta, \psi)$  a des points de rebroussement (cycloïde), cas obtenu quand la toupie est lâchée avec  $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ .

Exercice : auquel des trois cas correspond la figure 6.2 ?

### Équilibre et stabilité

Il existe un unique équilibre  $u_0 \in ]-1, 1[$ , correspondant à l'unique point stationnaire  $u_0 \in [u_1, u_2]$  de l'énergie potentielle effective  $V_u$ . Cet équilibre est stable, puisque le point stationnaire est un minimum strict.

Il faut aussi considérer les deux positions verticales de la toupie,  $u = \pm 1$ . On doit utiliser (6.17) et non (6.18), car la seconde a été établie en supposant  $u^2 \neq 1$ . D'après (6.12),  $\alpha = \pm 1$ . On calcule  $V_\theta$  avec

$$x = \frac{\delta\theta^2}{2}, \quad u = \cos\theta = \alpha(1 - x + \mathcal{O}(x^2)) :$$

$$\frac{(1 - \alpha u)^2}{1 - u^2} = \frac{1 - \alpha u}{1 + \alpha u} = \frac{1 - (1 - x)}{1 + (1 - x)} = \frac{x}{2 - x},$$

$$V_\theta(\theta) + u_1 = \beta \frac{x}{2 - x} + \alpha(1 - x) = \alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - \alpha \right) \delta\theta^2 + \mathcal{O}(\delta\theta^4).$$

On a donc un équilibre, toujours stable pour  $\theta = \pi$  et stable pour  $\theta = \pi$  si la toupie tourne suffisamment vite,  $\beta > 2$ .

# Chapitre 7

## Équilibre, stabilité, petites oscillations

### 7.1 Définition et caractérisation de l'équilibre

Soit un mouvement massif, décrit par les coordonnées cartésiennes  $x^i$ ,  $i = 1 \dots n$ , avec  $c$  contraintes holonomes, ou les coordonnées holonomes adaptées  $q^j$ ,  $j \leq n - c$ . Les équations de Hamilton (5.31) forment un système d'équations différentielles du premier ordre sur  $\mathbb{R}^{2(n-c)}$  :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q^j \\ p^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_j} H \\ -\partial_{q^j} H + Q'_j \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

**Définition 7.1** (équilibre). *Un équilibre est une solution de (7.1),*

$$\forall j, \exists q^{j*}, \forall t, \begin{pmatrix} q^j \\ p^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{j*} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À l'équilibre, (5.31) devient

$$-\frac{\partial T}{\partial q^j}(t, q^{k*}, 0) = -\frac{\partial V}{\partial q^j}(t, q^{k*}, 0) - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j}(t, q^{k*}, 0) + Q''_j. \quad (7.2)$$

On suppose :

- les  $q^j$  sont scléronomes,
- la force de frottement s'annule avec les  $\dot{x}^i$ .

Donc l'énergie cinétique (5.22) s'annule avec les  $\dot{q}^j$ . Vu (5.21), la force de frottement s'annule avec les  $\dot{q}^j$ . Ainsi, dans (7.2), tous les termes sont nuls, sauf celui en  $V$  et  $Q''_j$ . L'équilibre est donc caractérisé par :

$$-\frac{\partial V}{\partial q^j}(t, q^{k*}, 0) + Q''_j = 0, \quad j \leq n - c. \quad (7.3)$$

Si en outre  $Q_j'' = 0$ , alors les positions d'équilibre sont les *points stationnaires* du potentiel. Remarque : mais  $Q_j'' \neq 0$  décale l'équilibre.

## 7.2 Stabilité en équilibre

Quitte à décaler les  $q^j$ , on peut toujours supposer  $q^{j*} = 0$ ,  $j \leq n - c$ .

**Définition 7.2** (stabilité).  $0_{\mathbb{R}^{2(n-c)}}$ , solution d'équilibre de (7.1), est stable si pour tout voisinage  $A$  de  $0_{\mathbb{R}^{2(n-c)}}$ , il existe un voisinage  $B \subset A$  tel que toute solution de (7.1) passant instantanément dans  $B$  reste dans  $A$ .

Souvent, on se borne à étudier la *stabilité linéaire*, ce qui consiste à remplacer le second membre de (7.1) par son développement de Taylor à l'ordre un (qui préserve au moins l'équilibre) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q^j \\ p^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{q^k p_j}^2 H & \partial_{p_k p_j}^2 H \\ -\partial_{q^k q^j}^2 H & -\partial_{p_k q^j}^2 H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^k \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_j' \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

**Définition 7.3** (stabilité linéaire).  $0_{\mathbb{R}^{2(n-c)}}$  est un équilibre linéairement stable de (7.1) si c'est un équilibre stable de l'équation différentielle linéarisée (7.4).

De manière peu rigoureuse, on admet que (7.4) décrit correctement le mouvement, tant que sa solution est petite. Il s'ensuit que la stabilité implique la stabilité linéaire, mais la réciproque est fautive. En particulier, un forçage de grande amplitude peut exciter la solution vers le bassin d'attraction d'un autre équilibre.

Si  $H$  est scléronome, alors (7.4) est un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont l'ensemble des solutions complexes est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , ayant pour base une famille d'exponentielles, peut-être avec un facteur polynomial ; la stabilité linéaire équivaut à ce que les solutions de base soient toutes bornées en module, autrement dit, sinusoidales, avec un facteur polynomial constant.

### Stabilité de la solution nulle d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

$$\dot{q} = aq, \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

FIG. 7.1 – Diagramme de stabilité de la solution nulle de  $\dot{q} = aq$  sur  $\mathbb{R}^2$ 

Les valeurs propres pour  $a$  sont les racines complexes  $\sigma_1, \sigma_2$  du polynôme caractéristique de  $a$ .

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 - \operatorname{tr}(a)\sigma + \det a = \sigma^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2,$$

de discriminant

$$\Delta = \operatorname{tr}^2 a - 4 \det a. \quad (7.6)$$

Si  $\sigma, s$  sont une valeur et un vecteur propres pour  $a$ , alors  $\exp(\sigma t)s$  est une solution de (7.5). Si  $\Delta \neq 0$ , alors  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  $a$  est diagonalisable et la solution complexe générale de (7.5) est

$$s[t] = \exp(\sigma_1 t)s_1 + \exp(\sigma_2 t)s_2.$$

La solution réelle est obtenue en en prenant la partie réelle (ou imaginaire).

Comportement asymptotique de  $\exp(\sigma t)$ ,  $\sigma \in \mathbb{C}$  :

$$t \rightarrow \infty, \quad |e^{\sigma t}| = e^{\Re \sigma t} \begin{cases} = \mathcal{O}(1) & \text{si } \Re \sigma \leq 0 \text{ (stable),} \\ \rightarrow \infty & \text{si } \Re \sigma > 0 \text{ (instable),} \end{cases}$$

et  $\exp(\sigma t)$  tourne (et sa partie réelle oscille) autour de l'équilibre si et seulement si  $\Im \sigma \neq 0$ .

On discute le comportement asymptotique de  $s[t]$  dans le plan  $(\operatorname{tr} a, \det a)$  (fig. 7.1).

- Si  $\Delta < 0$  (partie convexe bordée par la parabole), alors les racines sont complexes conjuguées  $\sigma, \bar{\sigma}$ , la condition de stabilité est  $2\Re \sigma = \operatorname{tr} a \leq 0$  et  $q$  oscille.
- Si  $\det a < 0$  (demi-plan inférieur), alors les racines sont réelles et une est strictement positive, donc  $q$  diverge, asymptotiquement monotone.
- Si  $\Delta > 0$  et  $\det a \geq 0$  (partie pincée entre l'axe des traces et la parabole), alors il y a deux racines réelles de même signe, celui de  $\operatorname{tr} a$ , la condition de stabilité est  $\operatorname{tr} a \leq 0$  (stable à gauche, instable à droite) et  $q$  est monotone.

Exercice : cas marginal  $\Delta = 0$ .

### 7.2.1 Stabilité de l'équilibre harmonique

On étudie la stabilité de la solution nulle de

$$\ddot{x} + \lambda x = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad (7.7)$$

un oscillateur harmonique si  $\lambda > 0$ .

Solution sur  $\mathbb{C}$  :

$$(a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad x[t] = ae^{i\sqrt{\lambda}t} + be^{-i\sqrt{\lambda}t}. \quad (7.8)$$

Solution sur  $\mathbb{R}$  :

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} \lambda > 0 : & x[t] = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t), \\ \lambda < 0 : & x[t] = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{-\sqrt{-\lambda}t}. \end{cases}$$

La solution nulle de (7.7) est stable si et seulement si  $\lambda > 0$ .

Alternativement, on se ramène au cas précédent, avec

$$q = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

## 7.3 Equations de Lagrange linéarisées

É

On suppose : les  $q^j$  sont scléronomes holonomes ; le potentiel est une énergie potentielle ; l'énergie potentielle est stationnaire en  $q^{j*} = 0$  ; la fonction de dissipation est scléronome et cyclique ; la force de frottement s'annule avec les  $\dot{q}^j$ .

On développe au second ordre l'énergie cinétique  $T$  (5.22), l'énergie potentielle  $V$ , et la fonction de dissipation  $\Phi$ , au voisinage de  $q^{j*}$  et de  $\dot{q}^j = 0$  :

$$T(q^i, \dot{q}^i) \approx \frac{1}{2} M_{i,j} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad M_{i,j} = M_{i,j}(0), \quad (7.10)$$

$$V(q^j) \approx \frac{1}{2} K_{i,j} q^i q^j, \quad K_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^i}(0), \quad (7.11)$$

$$\Phi \approx \frac{1}{2} F_{i,j} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad F_{i,j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}(0). \quad (7.12)$$

Les coefficients  $M_{i,j}$ ,  $K_{i,j}$ ,  $F_{i,j}$  sont respectivement les coefficients de masse, raideur, frottement ; à l'ordre du développement (deux), il ne peuvent être que constants. Pour les obtenir en pratique, il est souvent plus rapide de faire

un développement limité que de calculer formellement des dérivées d'ordre deux.

Avec (7.10, 7.11, 7.12), (5.31) devient un système d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$M_{i,j}\ddot{q}^j + F_{i,j}\dot{q}^j + K_{i,j}q^j = Q''_i, \quad (7.13)$$

$$M\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = Q'', \quad (7.14)$$

où  $q, Q'' \in \mathbb{R}^{n-c}$  sont des vecteurs colonnes et  $M, F, K$  des matrices réelles, symétriques d'après le théorème 2.18. Il faut que  $M$  soit inversible pour que (7.14) soit bien posé. Comme il ne semble pas impossible que la linéarisation transforme un problème non-linéaire bien posé en un problème linéaire mal posé, on suppose en théorie  $M$  inversible, et on conseille, pour les applications, de vérifier  $\det M \neq 0$  (il est par contre inutile d'inverser  $M$ ).

## 7.4 Oscillation libre et forme normale

On étudie tout d'abord le cas idéal, sans frottement ni forçage,  $F = 0$ ,  $Q'' = 0$ . On cherche des solutions complexes de sous la forme

$$e^{i\omega t}s, \quad s \in \mathbb{C}^{n-c}, \quad s \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{C}. \quad (7.15)$$

Le taux de croissance est  $-\Im\omega$ , la pulsation est  $\Re\omega$ . En substituant (7.15) dans (7.14),

$$0 = (K - \omega^2 M)s = (M^{-1}K - \omega^2)s. \quad (7.16)$$

Il existe  $s \neq 0$  solution de (7.16) si et seulement si il existe une valeur et un vecteur propres  $s, \omega^2$  pour  $M^{-1}K$  si et seulement si  $\omega^2$  est une racine du polynôme  $P$ ,  $P(X) = \det(K - XM)$ .

On cherche des conditions suffisantes, et si possible nécessaires, pour que  $M^{-1}K$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème ?? montre l'équivalence entre le problème posé et celui de la *co-diagonalisation* sur  $\mathbb{R}$  des formes quadratiques de matrices  $M, K$ . Remarque.  $M^{-1}K$  n'étant pas en général symétrique (sauf si  $M, K$  commutent), le théorème 1.37 ne s'applique pas.

Si  $P$  n'a que des racines simples, alors  $M^{-1}K$  est diagonalisable. Mais cette condition n'est pas nécessaire, car  $P$  peut avoir une racine multiple. De plus, on n'en tire aucune information sur la réalité des valeurs propres.

En combinant les théorèmes ??, ??, on obtient que  $M^{-1}K$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si la forme quadratique de matrice  $M$  est non-dégénérée positive, ce qui est vrai, parce que l'énergie cinétique est positive. Donc,  $M^{-1}K$  est diagonalisable et  $M, K$  sont co-diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice : montrer de manière élémentaire  $\omega^2 \in \mathbb{R}$  en multipliant (7.16) à gauche par  $s^t$ .

$s$  décrivant une base propre pour  $M^{-1}K$ , les parties réelle et imaginaire des solutions complexes (7.15) de (7.14) forment une famille de  $2(n - c)$  solutions réelles indépendantes, donc une base de solutions sur  $\mathbb{R}$ , d'après le théorème 2.22.

**Définition 7.4** (forme normale). *Soit des coordonnées  $\xi^i$  dans une base propre (en général oblique) pour  $M^{-1}K$ . Une forme normale d'une expression est sa transformée par le changement de coordonnées  $q^j \rightarrow \xi^i$ .*

La forme normale de (7.13) est

$$\ddot{\xi}^i + \omega_i^2 \xi^i = 0. \quad (7.17)$$

Comme  $M, K$  sont co-diagonalisables,  $\omega_i^2 = \kappa_i/m_i$ , où  $m_i > 0$  est une masse propre et  $\kappa_i$  est une raideur propre. D'après l'étude de l'oscillateur harmonique (7.7, 7.8), la solution d'équilibre  $\xi^i = 0$ ,  $i \leq n - c$  est stable si et seulement si  $\kappa_i > 0$ ,  $i \leq n - c$ , autrement dit, aucun ressort ne doit être « cassé », ou toutes les parties du corps doivent être bien amarrées.

La forme normale de l'énergie potentielle est

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-c} \kappa_i \xi^i{}^2.$$

L'équilibre est donc linéairement stable si le développement de Taylor au second ordre de l'énergie potentielle, au voisinage de l'équilibre, est une forme quadratique non-dégénérée positive. Si cette forme quadratique a une valeur propre strictement négative, alors l'équilibre est instable. Si une valeur propre est nulle, alors la linéarisation ne permet pas de conclure. Il faudrait développer le hamiltonien à un ordre plus élevé.

Le lagrangien peut être mis sous forme normale :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-c} (\dot{\xi}^j{}^2 - \omega_j^2 \xi^j{}^2). \quad (7.18)$$

Remarque. Chaque terme de la somme à droite dans (7.18) peut être multiplié par un coefficient arbitraire (non-nul) sans rien changer aux équations du mouvement.

## 7.5 Oscillations forcées

Un mouvement lagrangien au voisinage d'un équilibre stable est forcé par  $Q'_j$  (5.31). Tant que les oscillations restent petites, le mouvement est décrit approximativement par les équations linéarisées, de forme normale

$$\ddot{\xi}^i + \omega_i^2 \xi^i = \Xi^i(t, \xi^j, \dot{\xi}^j), \quad j = 1 \dots n - c. \quad (7.19)$$

Les coordonnées normales  $\Xi^i$  de la force extérieure s'obtiennent à partir des  $Q'_j$  par des transformations linéaires. La solution forcée (7.20) s'écarte-t-elle beaucoup de l'équilibre ?

On suppose les forces cycliques et holonomes, si bien que les oscillateurs évoluent indépendamment.

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \Xi[t], \quad (7.20)$$

(7.20) se ramène à une équation du premier ordre sur une fonction complexe :

$$\zeta = \dot{\xi} + i\omega\xi, \quad \dot{\zeta} - i\zeta = \Xi[t].$$

La solution sans second membre de (7.21) est  $\zeta = a \exp(i\omega t)$ . Par la méthode de variation de la constante, on trouve une solution particulière de la forme  $a[t] \exp(i\omega t)$ . La solution complète de (7.21) est

$$\zeta[t] = \zeta(0)e^{i\omega t} + \int_1^t e^{i\omega(t-t')} \Xi(t') dt'. \quad (7.21)$$

Exercice : vérifier que (7.21) est solution de (7.20).

L'énergie totale est

$$H = T + V = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \omega^2 \xi^2) = \frac{1}{2} |\zeta|^2.$$

En agissant sur le mouvement depuis  $t = -\infty$ ,  $\zeta(-\infty) = 0$ ,

$$\zeta[t] = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t \exp(-i\omega t') \Xi(t') dt'.$$

L'énergie finalement accumulée dans le mouvement est

$$H = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t') \Xi(t') dt' \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \hat{\Xi}(\omega) \right|^2,$$

où  $\hat{\Xi}$  est la transformée de Fourier de  $\Xi$ . Seule l'énergie de la composante de Fourier résonnante (accordée avec la pulsation propre) est transmise.

Le forçage sinusoïdal

$$\Xi[t] = \exp(i\gamma t), \quad \gamma > 0, \quad \gamma \neq \omega > 0$$

produit une solution particulière

$$\xi_1[t] = a_1 e^{i\gamma t}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

En l'absence de raideur propre ( $\omega = 0$ ), on aurait

$$\xi_1[t] = -\frac{e^{i\gamma t}}{\gamma^2}.$$

L'oscillateur harmonique agit comme un amplificateur de gain

$$g = \frac{-\gamma^2}{\omega^2 - \gamma^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\gamma^2}}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \omega^\pm} g = \pm\infty.$$

Le passage par la résonance est marqué par une divergence de l'amplitude et un saut de phase de  $\pi$ .

À la résonance  $\gamma = \omega$ , on cherche et on trouve une solution particulière apériodique de la forme

$$\xi_1 = a_1 t e^{i\omega t}, \quad a_1 = \frac{-i}{2\omega}. \quad (7.22)$$

L'amplitude croît linéairement, jusqu'à excéder celle de la solution générale sans second membre (et mettre en défaut l'approximation linéaire à la base de l'étude). L'énergie s'accumule indéfiniment, en l'absence de dissipation.

Au voisinage de la résonance, on pose  $\gamma = \omega + \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^\pm$ . La solution générale de (7.20) est

$$\xi[t] = a[t] e^{i\omega t}, \quad a[t] = a_0 + a_1 e^{i\epsilon t}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \sim -\frac{1}{2\omega\epsilon} \rightarrow \mp\infty.$$

$a_0 \ll a_1$  et  $a[t]$  varie lentement, par rapport à  $e^{i\omega t}$ . En développant l'exponentielle pour  $t$  petit ( $\exp(x) = 1 + x + \dots$ ), on obtient le développement asymptotique

$$t \ll \epsilon^{-1}, \quad a[t] \approx -\frac{it}{2\omega}.$$

En comparant avec (7.22), on voit qu'il faudra attendre environ  $\epsilon^{-1}$  avant de pouvoir distinguer une solution presque résonante d'une solution exactement résonante. Si  $\epsilon \neq 0$ , alors  $|a[t]|$  oscille entre les valeurs  $|a_1| \pm |a_0|$ ,  $\xi[t]$  a des

FIG. 7.2 – Battements

*battements* (fig. 7.2). Le mouvement a deux échelles de temps très différentes  $\omega^{-1}$  et  $\epsilon^{-1}$ .

Exemple. L'addition de deux vibrations légèrement désaccordées produit des battements à basse fréquence et de grande amplitude. C'est pourquoi il est nécessaire, dans un orchestre, d'accorder les instruments les uns par rapport aux autres, de sorte que  $\epsilon^{-1}$  soit très supérieur à la durée maximale d'une note.

## 7.6 Oscillation avec frottement

On retourne à (7.14), avec frottement, sans forçage. Comme à la section (??), on cherche des solutions exponentielles,

$$e^{\sigma t} s, \quad s \in \mathbb{C}^{n-c}, \quad s \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Le taux de croissance complexe  $\sigma$  est racine de

$$0 = \det(\sigma^2 M + \sigma F + K), \quad (7.23)$$

équation algébrique à coefficients réels de degré  $n - c$ , dont les racines sont réelles ou complexes conjuguées.

D'après (5.39),

$$\dot{H} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j = -2\Phi,$$

car  $\Phi$  (7.12) est une forme quadratique (5.28). On demande que le frottement dissipe l'énergie, autrement dit, la forme quadratique  $\Phi$  doit être non-dégénérée positive. Si de plus  $F, K$  sont non-dégénérées positives, alors les parties réelles de toutes les racines de (7.23) sont strictement négatives, l'énergie totale tend vers zéro, ce qui assure la stabilité.

Pour entretenir le mouvement, il faut fournir de l'énergie. On recherche un régime permanent sur l'oscillateur harmonique forcé-frottant

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega^2 q = \exp(i\gamma t), \quad \lambda, \omega^2, \gamma > 0. \quad (7.24)$$

La solution générale de (7.24) sans second membre est transitoire, c'est-à-dire, tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  si  $\lambda \neq \omega$  :

$$\begin{cases} \lambda < \omega : e^{(-\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})t} \\ \lambda = \omega : (a_1 t + a_0) e^{i\omega t} \\ \lambda > \omega : e^{(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}, \end{cases}$$

FIG. 7.3 – Réponse en amplitude et phase de l'oscillateur amorti

Le cas  $\lambda = \omega$  viole la conservation de l'énergie.

Exercice. Trouver d'abord toutes les solutions exponentielles de l'équation de l'oscillateur critiquement amorti

$$\ddot{s} + 2\omega\dot{s} + \omega^2 s = 0, \quad (7.25)$$

puis toutes les solutions par la méthode de variation de la constante. Mettre (7.25) sous la forme (7.5), et vérifier que la matrice  $a$  n'est pas diagonalisable.

On suppose  $\lambda < \omega$ . La solution permanente est  $e^{i\gamma t}s$ ,

$$s = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 + i2\lambda\gamma} = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{(\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad (7.26)$$

$$\delta \in [0, \pi], \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\omega^2 - \gamma^2}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \omega^\pm} \tan \delta = \mp\infty, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0, +\infty} \tan \delta = 0. \quad (7.27)$$

$$\delta(\gamma) = \arctan \frac{2\lambda\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} + \pi(\gamma > \omega). \quad (7.28)$$

Pour satisfaire (7.27), si  $\gamma > \omega$ , alors on ajoute  $\pi$ . Alors que  $\gamma \mapsto \tan \delta$  est discontinue (et même divergente) en  $\omega$ ,  $\delta$  est continue.

Pour  $\lambda \ll \epsilon \ll \omega$  (approximation délicate!), et avec  $\gamma = \omega + \epsilon$ ,

$$s = \frac{1}{-2\omega\epsilon - \epsilon^2 + i2\lambda(\omega + \epsilon)} \approx -\frac{1}{2\omega(\epsilon - i\lambda)} \approx \frac{e^{-i\delta}}{2\omega\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \tan \delta \approx -\frac{\lambda}{\epsilon}. \quad (7.29)$$

La solution exacte (7.26) et son approximation (7.29) sont tracées sur la figure 7.3.

# Chapitre 8

## Mécanique variationnelle

### 8.1 La fonctionnelle action et sa différentielle

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned}([0, 1], \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \phi) &\mapsto L(t, \phi),\end{aligned}$$

continue en temps, différentiable (déf. 2.15) en phase  $\phi$ ,

$$L(t, \phi + \delta\phi) - L(t, \phi) = \partial_\phi L(t, \phi) \delta\phi + r(t, \phi, \delta\phi), \quad \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{|r(t, \phi, \delta\phi)|}{N(\delta\phi)} = 0, \quad (8.1)$$

pour la norme (équivalente à la norme euclidienne, mais plus commode ici)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ N : (x, v) &\mapsto |x| \vee |v|.\end{aligned}$$

**Définition 8.1** (action). *Soit un point mobile  $x \in \mathbf{C}_1([0, 1], \mathbb{R})$ . L'action du lagrangien  $L$  est la forme fonctionnelle  $M$ ,*

$$M(x) = \int_1^1 L(t, x[t], \dot{x}[t]) dt. \quad (8.2)$$

(Hamilton-Jacobi.)

Sur l'espace vectoriel  $\mathbf{C}_1([0, 1], \mathbb{R})$ , on utilise la norme fonctionnelle

$$\|x\| = N(\|x\|_\infty, \|\dot{x}\|_\infty),$$

bien définie parce que  $x, \dot{x}$  sont continues sur  $[0, 1]$  compact pour la norme uniforme (??).

La variation d'action est

$$M(x + \delta x) - M(x) = \int_1^1 (L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - L(t, x, \dot{x})) dt = \\ \int_1^1 (\partial_x L(t, x, \dot{x}) \delta x + \partial_v L(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x}) + \int_1^1 r(t, x, \dot{x}, \delta x, \delta \dot{x}) dt. \quad (8.3)$$

On veut montrer que l'action est différentiable, de différentielle  $dM$ ,

$$dM_x(\delta x) = \int_1^1 (\partial_x L(t, x, \dot{x}) \delta x + \partial_v L(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x}) dt. \quad (8.4)$$

Il suffit de montrer que le reste, dernier terme dans (8.3), est négligeable devant  $\|\delta x\|$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . D'après (8.1),

$$\forall t, \exists \alpha[t] > 0, (N(\delta \phi) < \alpha[t] \Rightarrow |r(t, \phi, \delta \phi)| < \epsilon N(\delta \phi)).$$

$[0, 1]$  étant un ensemble infini, rien ne permet d'affirmer  $\inf \alpha[t] > 0$ . Cela est une difficulté typique de l'analyse fonctionnelle, qu'on résout en demandant des propriétés supplémentaires à  $L$ .

Avec  $L$  uniformément différentiable :

$$\exists \alpha > 0, \forall t, (N(\delta \phi) < \alpha \Rightarrow |r(t, \phi, \delta \phi)| < \epsilon N(\delta \phi)). \quad (8.5)$$

$$\forall (x, \delta x \in \mathbf{C}_1([0, 1], \mathbb{R}), \|\delta x\| < \alpha), \forall t, N(\delta x[t], \delta \dot{x}[t]) \leq \|\delta x\| < \alpha, \\ |r(t, x[t], \dot{x}[t], \delta x[t], \delta \dot{x}[t])| < \epsilon N(\delta x[t], \delta \dot{x}[t]) \leq \epsilon \|\delta x\|, \\ \left| \int_1^1 r(t, x, \dot{x}, \delta x, \delta \dot{x}) dt \right| \leq \epsilon \|\delta x\|.$$

Donc  $M$  est différentiable. Cependant, la différentiabilité uniforme n'est pas une propriété facile à vérifier en pratique.

Soit  $t \in [0, 1]$ , tel que  $\phi \mapsto L(t, \phi)$  admette une différentielle d'ordre deux sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$\exists \mu > 0, \forall \phi \in \Omega, \forall i, j \in \{x, v\}, |\partial_{i,j}^2 L(t, \phi)| \leq \mu,$$

et  $\phi, \delta \phi$  tels que  $[\phi, \phi + \delta \phi] \subset \Omega$ .

En calculant et majorant le reste de la formule de Mac-Laurin (Taylor-Lagrange en zéro) de  $\epsilon \mapsto L(t, \phi + \epsilon \delta \phi)$  à l'ordre un, on peut montrer [18][t. 2, V.9]

$$|r(t, \phi, \delta \phi)| \leq 2\mu N(\delta \phi)^2. \quad (8.6)$$

Sans entrer dans les détails, cela résulte de la majoration de la différentielle d'ordre deux,

$$\frac{1}{2} \left| \partial_{xx}^2 L \delta x^2 + 2 \partial_{xv}^2 L \delta x \delta v + \partial_{vv}^2 L \delta v^2 \right| \leq \frac{1}{2} (\delta x^2 + 2 |\delta x \delta v| + \delta v^2) \mu \leq 2\mu N (\delta \phi)^2.$$

Mais il reste encore à trouver une majoration du reste uniforme en temps. Soit un compact  $K \subset \mathbb{R}^3$ . On considère uniquement les points mobiles tels que

$$\forall t \in [0, 1], (t, \phi[t]) \in K.$$

On suppose, pour tout  $t$ ,  $L$  admet une différentielle d'ordre deux, en fonction de la phase, à l'intérieur de chaque coupe de  $K$  à  $t$  donné, avec des dérivées partielles d'ordre deux continues sur  $K$ . Le théorème 2.13 assure l'existence de

$$\mu = \sup_{i,j \in \{x,v\}, (t,\phi) \in K} \left| \partial_{i,j}^2 L(t, \phi) \right| < \infty.$$

On en tire une majoration uniforme du reste différentiel, et la différentiabilité de  $M$ , sur une partie de son ensemble de définition.

Finalement, si  $L$  est  $\mathbf{C}_2$  sur un compact  $K$ , alors  $M$  est différentiable, au voisinage de tout point mobile  $x \in \mathbf{C}_1([0, 1], \mathbb{R})$  intérieur à  $K$ .

## 8.2 Théorème et principe variationnels

En intégrant par partie le second terme à droite dans (8.4) :

$$\int_1^1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_0^1 - \int_1^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt.$$

$$\boxed{dM = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_0^1 - \int_1^1 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \delta x dt.}$$

Un point mobile  $x$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ , deux fois dérivable, est solution de l'équation de Lagrange,

$$\forall t \in [0, 1], \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (8.7)$$

si et seulement si il est un point stationnaire de la fonctionnelle action,  $dM_x = 0$ .

Remarque. Il faut bien que  $x$  soit deux fois dérivable dans (8.7), qui se réduit en définitive à une équation différentielle du second ordre. Au contraire, l'action peut être définie sur un point mobile dont l'accélération n'existe pas.

FIG. 8.1 – Chemin le plus court entre  $A$  et  $B$  ?

La recherche de solutions irrégulières aux équations du mouvement est un sujet d'étude mathématique. Wiener a développé la théorie mathématique du mouvement brownien, continu mais nulle part dérivable. Il y a des applications en cosmologie, biologie et économie [19].

Exemple. Parmi les courbes passant par deux points  $***$ ,

$$(x, f(x)), f \in D^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(1) = 1,$$

on cherche la plus courte (fig. 8.1). L'élément de longueur est  $ds$ ,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, ds = \left(1 + \frac{dy^2}{dx}\right)^{1/2} dx.$$

La fonctionnelle qui à une courbe associe sa longueur est  $M$ ,

$$M(f) = \int_0^1 L(x, f(x), f'(x)) dx, \quad L(x, y, y') = (1 + y'^2)^{1/2}.$$

La courbe la plus courte est un point stationnaire de  $M$ , qui vérifie (8.7). Le lagrangien, cyclique, s'intègre une fois :

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = (1 + f'(x)^2)^{-1/2} f'(x) = \text{cst.}$$

La seule solution vérifiant les conditions aux limites est la ligne droite,  $f'(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ .

Maupertuis a proposé le principe de moindre action, comme loi universelle de la nature (1744). Ce principe gouverne en effet

- la mécanique, comme on vient de le voir,
- l'optique : la lumière choisit son trajet de sorte que son temps de parcours (ou chemin optique) soit minimal (Fermat),
- l'économie : chacun minimise sa dépense et maximise son gain.

# Chapitre 9

## Conclusion

### 9.1 La méthode lagrangienne

Pour un système composé de solides, calculer  $n$ , auquel un point contribue pour 3, une tige (sans rotation propre) 5 ; une partie solide non-dégénérée 6. Former  $c$  contraintes holonomes, fixant  $q^j$ ,  $j > n - c$ .

Exprimer en fonction de  $(q^j, \dot{q}^j)$ ,  $j = 1 \dots n - c$  l'énergie cinétique, somme des énergies cinétiques partielles. Pour chaque partie solide, l'énergie cinétique s'exprime à l'aide d'un opérateur d'inertie (6.4). Pour orienter un solide, on utilise les angles d'Euler (s'ils sont adaptés).

Exprimer en fonction de  $(q^j, \dot{q}^j)$ ,  $j = 1 \dots n - c$  le potentiel connu *a priori* ou la forme différentielle travail virtuel, à intégrer autant que possible, en faisant apparaître un potentiel. (thé. 2.41) est un critère d'intégrabilité. La somme des potentiels n'est pas essentiellement le potentiel total, parce que les parties peuvent interagir ( $V_{12} = V_1 + V_2 + V_{12}$ ), mais l'énergie gravitationnelle intérieure peut souvent être négligée.

Le hamiltonien ou la cyclicité du lagrangien fournissent des constantes du mouvement. D'une constante du mouvement  $C(t, q^j, \dot{q}^j) = \text{cst}$ , on tire une intégrale seconde :

$$\dot{q}^j = C_1(t, q^j[t]), \quad dt = \frac{dq^j}{C_1(t, q^j[t])}, \quad t = \int \frac{dq^j}{C_1(t, q^j[t])},$$

à inverser pour obtenir  $t \mapsto q^j$ .

S'il y a strictement moins de constantes du mouvement que de degrés de liberté, alors, après avoir pris en compte toutes les intégrales secondes, il reste encore un système d'équations différentielles, en général non-linéaires. Souvent, on cherche seulement quelques propriétés du mouvement, comme la trajectoire (sans paramétrisation temporelle), la période, le comportement

asymptotique... , qui peuvent parfois être obtenues sans résoudre complètement ou exactement les équations du mouvement. Le calcul numérique approché peut rendre service (différences finies, méthode de Runge-Kutta...).

Avantages de la méthode lagrangienne (par rapport à la vectorielle) :

- Possibilité d'utiliser d'emblée les coordonnées adaptées aux contraintes.
- Des constantes du mouvement obtenues systématiquement.
- Le mouvement est représenté seulement par quelques fonctions réelles.

Inconvénients : la méthode lagrangienne est restreinte par ses hypothèses.

## 9.2 Quelles forces fondamentales ?

Il existe d'autres forces fondamentales que la gravité, pour lesquelles on espère des lois invariantes, par changement de référentiel-espace galiléen, translation, rotation, réflexion, échange et renversement du temps.

La force électromagnétique est décrite par la loi de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (9.1)$$

où  $q$  est la charge électrique, et  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  sont les champs électrique et magnétique, régis en général par les équations de Maxwell, en particulier, les lois de Coulomb (électrostatique) et d'Ampère (magnétostatique). La force électromagnétique est invariante par translation, rotation, réflexion (mais  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur, changeant de signe par réflexion), échange et renversement du temps, mais elle ne l'est pas par changement de référentiel-espace. Seule la relativité restreinte permet de réconcilier pleinement électromagnétisme et invariance par changement de référentiel-espace.

L'interaction faible, gouvernant la radioactivité  $\beta$  ne respecte pas l'invariance par réflexion, elle est chirale.

## 9.3 Quelles forces effectives ?

Quand  $n$  est grand, par exemple pour le mouvement de la ceinture d'astéroïdes (Laplace) ou des molécules d'un gaz, certaines approximations sont nécessaires. On peut distinguer, d'une part, des approximations projectives, négligeant certains degrés de liberté, d'autre part, des approximations statistiques, moyennant les degrés de liberté.

Dans le premier cas, le critère de choix des degrés de liberté traités est souvent l'échelle : on décrit les grandes échelles en oubliant les petites (ou l'inverse). À l'extrême, on considère un corps comme un point virtuel, coïncidant avec le barycentre, portant la masse totale, la quantité de mouvement,

voir un moment cinétique de *spin*, et soumis à un torseur dynamique effectif. Exemples : remplacer une étoile (très éloignée) ou un électron (très petit) par un point, remplacer un tourbillon fluide par un solide.

En mécanique statistique, on cherche à obtenir des lois de probabilité, ou des moments (moyenne, écart-type...). Exemple : dans un gaz monoatomique, l'énergie cinétique moyenne d'un atome est  $3/2 kT$ . La thermodynamique, d'abord développée sur des bases empiriques (Clausius), a été réduite à la mécanique statistique (Gibbs), en passant par la théorie cinétique des gaz (Maxwell, Boltzmann, Van der Waals).

Pour les fluides turbulents, la méthode projective conduit à la simulation des grandes échelles, alors que la méthode statistique conduit au modèle «  $K\epsilon$  ». Dans les deux cas, on rencontre des difficultés plus importantes qu'en thermodynamique, en raison de la coexistence d'une large gamme d'échelles.

Pour la gravité (ou l'électrostatique), le théorème de Gauss montre qu'une mesure de masse à symétrie sphérique produit, à l'extérieur d'une sphère, le même torseur dynamique que toute la masse de la sphère virtuellement concentrée au centre. Pour une mesure de masse asphérique, on utilise un développement multipolaire.

Les forces de frottement entre surfaces solides dépendent non seulement de la contrainte normale et de leur vitesse relative instantanées, mais aussi de leur rugosité, élasticité, affinité chimique, et avec hysteresis. Les forces de frottement entre une surface solide et un fluide dépendent de leur vitesse relative instantanée (cisaillement), de la viscosité, et de l'histoire de l'écoulement, marquée en particulier par l'établissement de structures tourbillonnaires. La thermodynamique impose que le frottement dissipe l'énergie totale.

Une « masse mouillée » permet de représenter simplement l'inertie d'un objet immergé dans un fluide massif visqueux, mais dépend de la vitesse !

Les modèles approchés utilisent des lois effectives, plus ou moins empiriques, plus ou moins symétriques. L'inhomogénéité est la perte d'invariance par translation, l'anisotropie est la perte d'invariance par rotation, la chiralité est la perte d'invariance par réflexion. L'irréversibilité est la perte d'invariance par renversement du temps. L'hysteresis (retard en grec) est la dépendance en fonction de l'histoire.

Le principe de causalité, voisin du *déterminisme* de Leibniz ou Laplace, affirme que le mouvement futur est déterminé par le passé. Sa justification mathématique est le théorème 2.22.

Exercice. Discuter les propriétés des forces effectives, en particulier la symétrie d'échange et le principe de causalité, dans un modèle de société, vue comme un mouvement d'individus ponctuels.

## 9.4 Le sens du progrès en mécanique

La mécanique de Lagrange, formulée initialement sur des coordonnées comme la géométrie cartésienne, fut de même appelée analytique. Or, une formulation non-analytique est non seulement possible, mais nécessaire, pour assurer la *relativité tensorielle* : que les lois de la mécanique soient indépendantes du système de coordonnées.

En fait, les théories de Lagrange, Hamilton, Hamilton-Jacobi, représentent un ensemble d'objets, les pièces d'une même machine ou les planètes du système solaire, par une forme (lagrangien, hamiltonien ou action) sur un espace des phases synthétique, puis demande à celle-ci de satisfaire une condition, différentielle ou variationnelle. Ces théories sont donc synthétiques et fonctionnelles.

La mécanique fonctionnelle est un langage de haut niveau, routinisant ou « mécanisant » la mécanique vectorielle. Les instructions de base de la mécanique vectorielle sont économes en mathématiques, intuitives, vite apprises, mais d'usage délicat. En mécanique fonctionnelle, c'est tout le contraire, d'où son succès pratique.

Apprendre à utiliser les bons outils est le moyen de ne pas se laisser dépasser par les événements : *festina lente*. En contrepartie, le temps libéré peut être utilisé (entre autres) pour perfectionner l'outil théorique et étendre son domaine d'application : tel est le sens du progrès mathématique, scientifique et technique. La mécanique classique a ainsi évolué dans les directions suivantes.

- Une bonne partie du corpus mathématique classique : géométrie différentielle, théorie des équations différentielles, théorie des équations aux dérivées partielles, analyse fonctionnelle.
- La *mécanique statistique*, en l'association avec la théorie des probabilités (depuis Laplace), pour des questions de complexité, sans remettre en cause la physique.
- La *mécanique des milieux continus*, pour les mouvements à nombre infini de degrés de liberté.
- La *mécanique quantique* bouleverse la physique, en constatant l'impossibilité de mesurer la phase position-vitesse. Elle reprend à son compte le formalisme hamiltonien, d'une manière inattendue.
- La *théorie du chaos* révèle la richesse mathématique phénoménale des systèmes dynamiques non-linéaires, et oblige à tempérer le déterminisme.
- La *mécanique relativiste* naît de la nécessité de concilier relativité galiléenne et électromagnétisme. La relativité générale identifie accélération et gravité, l'espace étant courbé par les masses.

La mécanique classique est donc obsolète, en tant que théorie physique ultime, mais demeure une référence ou une source d'inspiration, plus ou moins implicite, pour toutes les sciences prédictives (mécanique, météorologie, physique, chimie, biologie, médecine, économie, sociologie). La mécanique céleste reste utile, tant que la Terre tourne. La mécanique des solides est utilisée dans l'industrie. La disponibilité d'ordinateurs rapides et de langages de programmation évolués rend possible la programmation de la mécanique directement au niveau *fonctionnel*.

Remerciements : Rémi Barrère, Pierre Haldenwang, l'École Supérieure de Mécanique de Marseille.



**Troisième partie**  
**Notice historique**



- Héraclite. VI<sup>e</sup> siècle avant J. C. Mouvement permanent.
- Démocrite. Autour de 400 avant J. C. Atome.
- Eudoxe de Cnide. IV<sup>e</sup> siècle avant J. C. Nombres réels.
- Archimède. III<sup>e</sup> siècle avant J. C. Barycentre, mesure.
- Diophante. Arithmétique, calcul symbolique.
- Euclide. III<sup>e</sup> siècle avant J. C. Géométrie, méthode axiomatique.
- Hipparque. II<sup>e</sup> siècle avant J. C. Précession des équinoxes.
- Claude Ptolémée. II<sup>e</sup> siècle avant J. C. Cinématique céleste, cartographie.
- Al-Khwarizmi. IX<sup>e</sup> siècle. Algèbre, algorithme.
- Jérôme Cardan 1501-1576. Équations algébriques, transmission mécanique.
- François Viète 1540-1603. Calcul symbolique.
- Galileo Galilei, dit Galilée 1564-1642. Mécanique expérimentale. La force ne dépend pas de la vitesse, le mouvement ne dépend pas de la masse (sous l'effet de la seule gravité).
- René Descartes 1596-1650. Géométrie analytique, quantité de mouvement, [12].
- Pierre de Fermat 1601-1665. Principe variationnel de l'optique.
- Christiaan Huygens 1629-1695. Moment cinétique, horloge à pendule isochrone [4], pendule double.
- sir Isaac Newton 1642-1727.
- Gottfried Leibniz 1646-1716. Calcul différentiel, monade.
- Pierre Varignon 1654-1722. Force.
- Les Bernoulli : Jacques 1654-1705, calcul des variations ; Jean 1667-1748, déplacements virtuels ; Daniel 1700-1782, élasticité, mécanique des fluides.
- James Bradley 1693-1762. Nutation terrestre, aberration astronomique.
- Pierre Louis Moreau de Maupertuis 1698-1759. Principe de moindre action, mesure du méridien terrestre.
- Gabriel Cramer 1704-1752. Équations linéaires.
- Geronimo Saccheri. Critique des postulats d'Euclide [20].
- Leonhard Euler 1707-1783. Fonctions, notations modernes, mouvement solide.
- Jean le Rond d'Alembert 1717-1783.
- Emmanuel Kant 1724-1804. Temps, espace [15].
- Joseph Louis de Lagrange 1736-1813. [11].
- Pierre Simon de Laplace 1749-1827. Déterminisme, probabilités.
- Adrien Marie Legendre 1752-1833. Transformée.
- Carl Friedrich Gauss 1777-1855. Clôture algébrique, géométrie différentielle, principe mécanique [24].
- Siméon Denis Poisson 1781-1840. Dérivée d'un vecteur tournant, toupie.
- Augustin Louis Cauchy 1789-1857. Suite uniconvergente, équation différentielle.

- Gaspard Gustave Coriolis 1792-1843. Force orthogonale à la vitesse dans un référentiel tournant.
- Jakob Steiner 1796-1863. Formule de changement d'origine pour l'opérateur d'inertie.
- Carl Jacobi 1804-1851. Calcul des variations.
- William Rowan Hamilton 1805-1865. Principe mécanique, nombres complexes, quaternions.
- Léon Foucault 1818-1868. Référentiel tournant, gyroscope.
- Léopold Kronecker 1823-1891.
- James Clerk Maxwell 1831-1879. Champ électromagnétique, théorie cinétique des gaz.
- Rudolf Lipschitz 1832-1903.
- Ernst Mach 1838-1916. Équivalence gravité-accélération.
- Johannes Van der Waals 1837-1923. Force intermoléculaire.
- Willard Gibbs 1839-1903. Mécanique statistique.
- John William Strutt Rayleigh 1842-1919. Frottement lagrangien.
- Gaston Darboux 1842-1917. Intégrale des fonctions continues.
- Georg Cantor 1845-1918. Théorie des ensembles.
- Ludwig Boltzmann 1844-1906. Théorie cinétique des gaz. Mécanique statistique.
- Oliver Heaviside 1850-1925. Dérivée de la fonction échelon.
- Gregorio Ricci-Curbastro 1853-1925. Calcul tensoriel.
- Henri Poincaré 1854-1912. Géométrie différentielle, fermeture des formes différentielles, dynamique non-linéaire, chaos.
- Alexandre Mikhaïlovich Lyapunov 1857-1918. Stabilité.
- Paul Painlevé 1863-1933. Intégrale première.
- Henri Lebesgue 1875-1941 et Émile Borel 1871-1956. Mesure, intégrale.
- Frigyes Riesz 1880-1956 et son frère Marcel. Analyse fonctionnelle.
- Albert Einstein 1879-1955. Relativité.
- Emmy Noether 1882-1935. Lien entre invariance cinématique et constantes du mouvement.
- Norbert Wiener 1894-1964. Mouvement brownien, analyse harmonique, cybernétique.

# Bibliographie

- [1] François Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques, t. 1 systèmes discrets*. Hermes science, 2001.
- [2] Pierrette Benoist-Gueutal and Maurice Courbage. *Mathématiques pour la physique – Intégrale de Lebesgue, fonctions analytiques, espaces normés*, volume 1. Eyrolles, 1993.
- [3] M. Bertin, J. P. Faroux, and J. Renault. *Mécanique du solide et des systèmes*. Dunod Université, 1982.
- [4] Jacques Blamont. La mesure du temps et de l'espace au xvii<sup>e</sup> siècle. *XVII<sup>e</sup> siècle*, 213(4), 2001.
- [5] J. C. Bône, J. Morel, and M. Boucher. *Mécanique générale*. Dunod, 1994.
- [6] Ha'ïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- [7] Léon Brillouin. *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*. Masson, 1938.
- [8] P. Brousse. *Mécanique analytique*. Vuibert, 1981.
- [9] Philippe Choquard. *Mécanique analytique*. Presses polytechniques et univ. romandes, 1992.
- [10] collectif. La nature et le principe de moindre action, avril 2002.
- [11] Joseph Louis de Lagrange. *La mécanique analytique*. 1788.
- [12] René Descartes. *Discours de la méthode*. 1637.
- [13] H. Goldstein. *Mécanique classique*. Presses univ. de France, 1964.
- [14] Christian Gruber and Willy Benoît. *Mécanique Générale*. Presses polytechniques et univ. romandes, 1998.
- [15] Emmanuel Kant. *Critique de la raison pure*. Presses Univ. de France, 1990.
- [16] Harry G. Kwatny. *Nonlinear control and analytical mechanics*. Birkhäuser, 2000.

- [17] L. D. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique tome 1 Mécanique*. Mir, 1966.
- [18] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudès. *Cours de mathématiques*. Dunod Université, 1978.
- [19] Laurent Nottale, Jean Chaline, and Pierre Grou. *Les arbres de l'évolution*. Hachette, 2000.
- [20] Geronimo Saccheri. *Euclides ab omni naevo vindicatus*. 1733.
- [21] Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1961.
- [22] Murray R. Spiegel. *Théorie et applications de la mécanique générale*. McGraw Hill, 1972.
- [23] Yves Talpaert. *Mécanique analytique t. II Dynamique des systèmes matériels*. Yves Talpaert, 1982.
- [24] Firdaus E. Udawadia and Robert E. Kalaba. *Analytical dynamics*. Cambridge univ. press, 1996.
- [25] B. Z. Vulikh. *Introduction to functional analysis for scientists and technologists*. Pergamon Press, 1963.
- [26] Norbert Wiener. *Invention : the care and feeding of ideas*. MIT Press, 1993.
- [27] Ludwig Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus*. Gallimard, 1993.
- [28] Stephen Wolfram. *A new kind of science*. Wolfram media, 2002.